A PRÍMEK FOKOZATOS SZŰRÉSE

Mivel $i>2$ esetekben a P_i prímszám az 1.1. Következmény szerint P_B vagy P_F típusú lehet, a szűrést minden fokozatban a $B=6n_B+1$ és az $F=6n_F+5$ sorozat-halmazban is el kell végezni. Ha a prímeket a sorozat-halmazokon belüli n_{BP} , illetve n_{FP} sorszámaik reprezentálják, akkor fokozatos szűrésük az összetett számok $n_{Bö}$, illetve $n_{Fö}$ sorszámainak a ki nem szűrhető elemektől való fokozatos elkülönítését jelenti. Fokozatos elkülönítés alatt az összetett számokat reprezentáló sorszámok diszjunkt végtelen számtani sorozatainak fokozatonként végzett megjelölését/törlését értjük.

A **prímek fokozatos szűrése** tehát olyan algoritmus, amellyel a potenciális prímeket reprezentáló n_B és n_F sorszámok halmazára alkalmazott eratoszthenészi szita -, illetve a sorszámokra módosított CPS - által meghatározott sorozatokat diszjunkt részsorozatokra konvertálva, majd ezeket fokozatosan elhagyva, lehetőség nyílik a szűrési fokozathoz rendelt küszöbérték felett a fokozattal bezárólag kiszűrhető és ki nem szűrhető tagok átlagos sűrűségének számítására.

Fokozatos szűrés alkalmazása a prímeket nem reprezentáló elemeknek a potenciálisan prímeket reprezentáló elemek halmazától való elkülönítésére

A prímek fokozatos szűrésének műveletéhez kapcsolódó alapfogalmak

1. DEFINÍCIÓ $i \geq 3$ esetben az i. szűrési fokozat **periódus-párjai** a megegyező **n_B és n_F sorszámok** egymást követő, **egyenként**

(f1) $\boldsymbol{\Delta_i} \quad = P_3P_4...P_i \ = \Delta_{i-1}\, P_i \ \ = \Delta_{iB} = \Delta_{iF}$

tehát **összesen $2\Delta_i$ elemszámú $(m\Delta_i+k_i\ ,\ (m+1)\Delta_i+k_i]$ intervallumai**, ahol m minden egész értékét felveheti, de $m \neq -1$, és $\Delta_i > k_i \geq J_i$, amit a 2. Definíció határoz meg. Az n_B és n_F sorszámok periódusaiban a fokozattal bezárólag ki nem szűrt elemek sűrűsége, illetve száma megegyezik, hasonlóan a kiszűrt elemek sűrűségéhez, illetve számához:

$m = -1$ esetben az n_B és n_F sorszámok $(-\Delta_i+k_i\ ,\ k_i]$ intervallumai nem tekinthetők az i. szűrési fokozat periódus-párjának, mivel azokon belül – a $(-(J_i+1),\ J_i)$ intervallum-párban prímeket reprezentáló elemek miatt – az i. fokozattal bezárólag ki nem szűrt elemek száma nagyobb, mint a fokozat periódus-párjaiban.

Az i. szűrési fokozathoz az n_B és n_F sorszámokat Δ_i különbségű számtani sorozatokba rendezzük, ezért ez lesz a fokozatban kiszűrt végtelen számtani sorozatok különbsége is. A fokozat periódus-párjaiba így a fokozatban kiszűrt (sorszám-)sorozatok egy-egy tagja tartozik.

A **sorozat különbség reciproká**nak jelölésére alkalmazzuk a v_i szimbólumot:

(f2) $\boldsymbol{v_i} \quad = 1/\Delta_i \ = 1/(\Delta_{i-1}\, P_i) \quad = v_{iB} = v_{iF}$

2. DEFINÍCIÓ Az i. szűrési fokozat $(m\Delta_i+J_i\ ,\ (m+1)\Delta_i+J_i]$ periódus-párjainak **J_i küszöbérték**e:

(f3) $0 \leq k_i^* < \boldsymbol{J_i} \quad = \mathrm{int}[P_i/6] \leq k_i < \Delta_i$, ahol P_i pozitív prímszám, $\boldsymbol{J_i}$ pozitív küszöbérték.

A periódus-párok negatív küszöbértéke az i. szűrési fokozatban:

(f4) $\boldsymbol{-(J_i+1)} \quad = -\mathrm{int}[(P_i+6)/6]$

Míg az $(m\Delta_i+k_i\ ,\ (m+1)\Delta_i+k_i]$ n_B és n_F sorszám-intervallumok bizonyosan az i. szűrési fokozat periódus-párjai, $m = 0,\ -1$ esetekben a $(k_i^*,\ \Delta_i+k_i^*]$, illetve $(-\Delta_i+k_i^*,\ k_i^*]$ sorszám-intervallum párok nem tekinthetők periódus-pároknak. Ezekben az i. fokozatban kiszűrhető $n_{Böi}$ és $n_{Föi}$ elem-összegek páratlanok, és 1-gyel kevesebbek, mint a fokozat periódus-párjaiban.

3. DEFINÍCIÓ Az egyes szűrési fokozatokkal bezárólag kiszűrt, megegyező különbségű sorozatok párosíthatók: ezek fele a (4) szerinti B, fele pedig az F végtelen számtani sorozatban előforduló összetett számok miatt kerül kiszűrésre az n_B , illetve az n_F sorszámok közül. A sorozat-tag párok számtani középértékei 3-mal oszthatók, melyek így az utoljára alkalmazott (i.) szűrési fokozat egymást követő fél periódusaiban váltakozva az n_A, illetve az n_D sorszám-sorozatba tartoznak.

Az $m = 0, -1$ esetek kivételével m egész értékei mellett az *i.* szűrési fokozattal bezárólag kiszűrt (valamint a ki nem szűrt) n_B és n_F sorszám-sorozat párok $[m\Delta_i\,,\ m\Delta_i+\Delta_i)$ – összesen $2\Delta_i$ – elemszámú periódus-párjaiba tartozó páros-páros, vagy páratlan-páratlan tag-párjainak számtani középértékei a $\mathbf{t_{m/i}}$ **tükörpontok, amelyek n_D sorszám elemek**. Számértékük:

(f5) $\mathbf{t_{m/i}} = t_{0/i} + m\Delta_i$, ahol $6\mathbf{t_{m/i}} = D_{tm/i} = 6t_{0/i} + m\, P_1\, P_2\, \Delta_i$, mivel

(f6) $t_{0/i} = (\Delta_i -1)/2$ $\quad 6t_{0/i} = D_{t0/i} = 3(\Delta_i-1)$ $\quad (m=0)$

A $t_{m/i}$ tükörpontok számtani középértékei azoknak az *i.* szűrési fokozat periódus-párjaiban a fokozattal bezárólag kiszűrt, valamint ki nem szűrt $(n_B\ ;\ n_F)$ sorozat-tag pároknak is, amelyek egyikének számértéke $m>0$ esetekben J_i -nél nagyobb és $t_{m/i}$ -nél kisebb, illetve $m<-1$ esetekben $-(J_i+1)$ -nél kisebb és $t_{m/i}$ -nél nagyobb.

Az $[m\Delta_i-(\Delta_i+1)/2,\ m\Delta_i+(\Delta_i-1)/2)$ és $(m\Delta_i-(\Delta_i+1)/2,\ m\Delta_i+(\Delta_i-1)/2]$ intervallum-párba tartozó, az *i.* fokozattal bezárólag kiszűrt, valamint ki nem szűrt n_B , illetve n_F sorozat-tagok számtani középértékei – m minden egész értéke mellett – **$m\Delta_i$ számértékű n_Δ sorszám elemek**. A tag-párok számértéke páros-páratlan.

Az $m\Delta_i$ számértékű n_B sorozat-tagok és ennek megfelelően az $m\Delta_i-1$ számértékű n_F sorozat-tagok az *i.* fokozattal bezárólag nem kerülnek kiszűrésre.

4. DEFINÍCIÓ

Nevezzük az *i.* szűrési fokozat **szimmetrikus periódus-párjai**nak

1. az $m = 0, -1$ esetek kivételével m egész értékei mellett az n_B és n_F sorszámok $\mathbf{[m\Delta_i\,,\ m\Delta_i+\Delta_i)}$ összesen $2\Delta_i$ elemszámú intervallum-párjait, illetve
2. az $m = 0$ eset kivételével m egész értékei mellett az n_B sorszámok $\mathbf{[m\Delta_i-(\Delta_i+1)/2,\ m\Delta_i+(\Delta_i-1)/2)}$ és az n_F sorszámok $\mathbf{(m\Delta_i-(\Delta_i+1)/2,\ m\Delta_i+(\Delta_i-1)/2]}$ szintén összesen $2\Delta_i$ elemszámú intervallum-párjait.

Az 1. alatt jelzett intervallum-párok $m = 0, -1$ esetekben, valamint $m = 0$ esetben a 2. alatt jelzett intervallum-pár nem tekinthetők szimmetrikus periódus-pároknak, mivel bennük az *i.* fokozattal bezárólag ki nem szűrt elemek száma nagyobb, mint a fokozat periódus-párjaiban.

5. DEFINÍCIÓ

Az *i.* szűrési fokozat **szegmens**einek nevezzük a fokozatot megelőzően még ki nem szűrt n_B és n_F sorszámok $[0,\ \Delta_{i+1})$ intervallumaiba tartozó, az algoritmus szerint rendezett P_i számú sorait.

A szegmensek **sor**ait Δ_i különbségű végtelen számtani sorozatok első P_{i+1} számú tagjai alkotják.

A sorok azonos sorszámú tagjainak Δ_{i-1} különbségű, P_i tagszámú számtani sorozatai a szegmensek **oszlop**ai.

Az n_B és n_F sorszámok $[0,\ \Delta_{i+1})$ intervallumaiban az $(i-1)$. szűrési fokozattal bezárólag ki nem szűrt elemek – a $(0;\ J_{i-1}]$ részintervallumok ki nem szűrhető elemeitől eltekintve – így z_i számú szegmensbe sorolhatók. A jelzett részintervallumok ki nem szűrt, prímeket reprezentáló elemei nem tartoznak a szegmensekbe, ennek megfelelően a sorszámokra adaptált CPS-ben megjelölt sorszámok halmazába sem. Minden $i \geq 3$ esetben a **szegmensek száma**:

(f7) $\mathbf{z_i} = (P_2-1)(P_3-1)...(P_{i-1}-1) = z_{i-1}(P_{i-1}-1) = 2z_{iB} = 2z_{iF}$

6. DEFINÍCIÓ

Az *i.* szűrési fokozatban minden szegmensből, annak P_i számú sora közül *1* sor kerül kiszűrésre, amely kiszűrt végtelen sorszám sorozat első P_{i+1} számú tagja. Eszerint az *i.* szűrési fokozatban **kiszűrt sorozatok száma**, megegyezően a **periódus-páronként kiszűrt elemek számá**val:

(f8) $\boldsymbol{\kappa_i} = z_i = 2\kappa_{iB} = 2\kappa_{iF}$

Valamely szűrési fokozatban a kiszűrésre kerülő sorozatok **kezdő sorozata** a legkisebb pozitív tagot tartalmazó sorozat. Ez a tag azonban nem szűrhető ki, mivel prímet reprezentál: $J_i = \mathrm{int}[P_i\ /6]$ A kezdő sorozat 2. tagja (Δ_i+J_i) a $(0,\ \Delta_i]$ intervallum-páron kívül van, így ebben az *i.* fokozatban kiszűrt elemek száma:

(f9) $\kappa^*_i = \kappa_i -1 = \kappa^*_{iB} + \kappa^*_{iF}$, ahol $\left|\kappa^*_{iB} - \kappa^*_{iF}\right| = 1$

7. DEFINÍCIÓ Az i. szűrési fokozatban a kiszűrt végtelen számtani sorozatokkal megegyező különbségű **ki nem szűrt sorozatok száma**:

(f10) $\boldsymbol{\eta_i} = z_{i+1} = (P_2-1)(P_3-1)...(P_i-1) = z_i(P_i-1) = 2\eta_{iB} = 2\eta_{iF}$

8. DEFINÍCIÓ A pozitív prímek szűrésének i. fokozatában az n_B és n_F sorszámok közül a P_i-vel osztható számokat reprezentáló, a megelőző fokozatokban még ki nem szűrt elemeket szűrjük ki. Ezért az $i > 3$ szűrési fokozatokban az **n_{Bi} kiszűrésre kerülő legkisebb pozitív elem**:

(f11) $t_{0/(i>3)} = (P_3P_4...P_i-1)/2 > \boldsymbol{n_{Bi}} = \boldsymbol{(P_i^2-1)/6} > J_i = \text{int}[P_i/6]$, tehát pl.:

$t_{0/3} = (5-1)/2 = 2 < n_{B3} = (P_3^2-1)/6 = 4 > J_3 = \text{int}[5/6] = 0$, de:

$t_{0/4} = (5*7-1)/2 = 17 > n_{B4} = (P_4^2-1)/6 = 8 > J_4 = \text{int}[7/6] = 1$

$t_{0/5} = (5*7*11-1)/2 = 192 > n_{B5} = (P_5^2-1)/6 = 20 > J_5 = \text{int}[11/6] = 1$

$t_{0/6} = (5*7*11*13-1)/2 = 2502 > n_{B6} = (P_6^2-1)/6 = 28 > J_6 = \text{int}[13/6] = 2$

Az i. fokozatában kiszűrésre kerülő legnagyobb negatív elem: $\boldsymbol{-(n_{Bi}+1)}$

9. DEFINÍCIÓ Az i. **szűrési fokozat periódus-párjainak s_i sorszáma** azoknak az $((s_i-1)\Delta_i+k_{si}, s_i\Delta_i+k_{si}]$ n_B és n_F periódus-pároknak a sorszáma, amelyeknél

(f12) $\boldsymbol{s_i} = m+1 = 1, 2, ...$ és

(f13) $0 < J_i < \boldsymbol{k_{si}} \leq n_{Bi} = (P_i^2-1)/6$

Az i. szűrési fokozat **1. periódus-pár**ja tehát az n_B és n_F sorszámok $(k_{si}, \Delta_i+k_{si}]$ intervallum-párja. Ha csak a $J_i < k_{si}$ feltétel teljesül, a fokozatban kiszűrt κ_i számú végtelen számtani sorozat egy-egy pozitív tagja ugyan eleme lesz a fokozat $((s_i-1)\Delta_i+k_{si}, s_i\Delta_i+k_{si}]$ n_B és n_F periódus-párjainak, de a fokozatban kiszűrt minden pozitív sorozat tag bizonyosan csak akkor eleme a periódus-pároknak, ha a $k_{si} \leq n_{Bi}$ korlátozás is teljesül.

10. DEFINÍCIÓ és ÉSZREVÉTEL

Az n_B, illetve n_F sorszámok meghatározott intervallumaiban a kiszűrhető, illetve ki nem szűrhető elemek **átlagos sűrűség**e ezek számának és a megfelelő intervallumok összes elemszámának a hányadosa.

A **ki nem szűrhető n_B**, iletve **n_F elemek** megfelelő sorszám sorozaton belüli **átlagos sűrűségé**nek jelölése: $\boldsymbol{r_B}$, illetve $\boldsymbol{r_F}$. Ezt a figyelembe vett intervallum megjelölése mellett kell alkalmazni. Az intervallumtól függően kétféle sűrűséggel számolhatunk:

- $\boldsymbol{r_{0B}}$, illetve $\boldsymbol{r_{0F}}$ átlagos sűrűség: 0-tól a megfelelő sorszám-intervallum határig ki nem szűrt sorszámok számának (μ_{0B}, illetve μ_{0F}) és az intervallum határ abszolút értékének a hányadosa;
- $\boldsymbol{r_{cB}}$, illetve $\boldsymbol{r_{cF}}$ a szűrés meghatározott periódusán, illetve periódusain belüli átlagos sűrűség.

Azonos sorszám-intervallumon belül általában $\mu_B \neq \mu_F$ és ezért $r_B \neq r_F$, de $\mu_B \sim \mu_F$ és így $r_B \sim r_F$, ha a sorszám-intervallum elegendően nagy. Az észrevétel általában az **i. szűrési fokozattal bezárólag ki nem szűrt n_B, iletve n_F elemek**re is fennáll: $\boldsymbol{\mu_{0iB} \neq \mu_{0iF}}$ és $\boldsymbol{r_{0iB} \neq r_{0iF}}$, de $\boldsymbol{\mu_{0iB} \sim \mu_{0iF}}$ és $\boldsymbol{r_{0iB} \sim r_{0iF}}$

Az **i. szűrési fokozat nem egész számú periódus párjaiban a fokozattal bezárólag ki nem szűrt n_B, iletve n_F elemek**re szintén $\boldsymbol{\mu_{ciB} \neq \mu_{ciF}}$ és $\boldsymbol{r_{ciB} \neq r_{ciF}}$, de **az egész számú periódus-párokban** a páros kiszűrés miatt: $\boldsymbol{\mu_{ciBp} = \mu_{ciFp}}$ és $\boldsymbol{r_{ciBp} = r_{ciFp}}$

$\pi(x)$-szel jelölve az x-nél nem nagyobb prímek számát és figyelembe véve, hogy P_1 és P_2 nem eleme sem a $\pi_B(x)$, sem a $\pi_F(x)$ halmaznak:

(f14) $\pi(x) = \pi_B(x) + \pi_F(x) + 2 = \pi^*(x) + 2$, ahol $\pi^*(x)/2 \sim \pi_B(x) \neq \pi_F(x) \sim \pi^*(x)/2$

(f15) $\pi(x)/x = S_{0x} = S_{0Bx} + S_{0Fx} + 2/x = S^*_{0x} + 2/x$, ahol $S^*_{0x}/2 \sim S_{0Bx} \neq S_{0Fx} \sim S^*_{0x}/2$

(f16) $S_{0Bx} = \pi_B(x)/x \sim \pi_B(6n)/6n$, ahol $\pi_B(x) = \pi_B(6n)$ és $\text{int}[(x-1)/6] = n$, tehát $x \sim 6n$

(f17) $S_{0Fx} = \pi_F(x)/x \sim \pi_F(6n)/6n$, ahol $\pi_F(x) = \pi_F(6n)$ és $\text{int}[(x-5)/6] = n$, tehát $x \sim 6n$

Végezzük el az $n = n_{Bi} = n_{Ai} = (P_i^2-1)/6$, valamint az $x \sim 6n = 6n_{Ai} = A_i$ helyettesítést:

(f18) $S_{0Bi} = \pi_{Bi}/A_i$, ahol $\pi_{Bi} = n_{Ai}\, r_{0Bi} = 6n_{Ai}\, S_{0Bi}$

(f19) $S_{0Fi} = \pi_{Fi}/A_i$, ahol $\pi_{Fi} = n_{Ai}\, r_{0Fi} = 6n_{Ai}\, S_{0Fi}$

A $[0, n_{Ai})$ sorszám intervallum-pár ki nem szűrt elemeinek, illetve a $[0, A_i)$ számintervallum P_1-től és P_2-től különböző prímjeinek száma:

(f20) $\pi^*_i = \pi^*(A_i) = \pi_i - 2 = n_{Ai}(r_{0Bi} + r_{0Fi}) = A_i(S_{0Bi} + S_{0Fi}) = A_i\, S^*_{0i}$

11. DEFINÍCIÓ A kiszűrt és ki nem szűrt elemek előfordulásának **gyakorisága** ezek periódus-páronkénti, illetve periódusonkénti számának és a periódus-pár, illetve periódus összes elemszámának a hányadosa.

A gyakoriság jelölésében fel kell tüntetni az aktuális, vagy az utoljára alkalmazott szűrési fokozatot, ami a periódus-pár, illetve periódus elemszámát is meghatározza. A ki nem szűrt elemek gyakorisága, ami a szűrési fokozat periódus-párjaiban, illetve periódusaiban megegyezik, mindig nagyobb, mint ugyanezekben az intervallumokban a ki nem szűrhető elemek átlagos sűrűsége. Ez utóbbi azonos elemszámú intervallumonként csökkenő tendenciájú.

12. DEFINÍCIÓ Az **utoljára kiszűrt n_B illetve n_F sorszám-elemek gyakorisága ($\rho_i = \rho_{iB} = \rho_{iF}$)**: az *i*. szűrési fokozatban kiszűrt sorozatok tagjainak gyakorisága a fokozat n_B és n_F periódus-párjaiban, illetve n_B vagy n_F sorszám-periódusaiban ($i>2$).

Az *i*. szűrési fokozat n_B és n_F periódus-párjaiba ($2\Delta_i$ elemszám) az utoljára (*i*. fokozatban) kiszűrt valamennyi (κ_i számú) sorozat egy-egy tagja tartozik. Mivel a *B* és *F* sorozat kiszűrt tagjai, illetve a tagok sorszámai az n_B és n_F periódus-párokban párosíthatók, így:

(f21) $$\boldsymbol{\rho_i} = \boldsymbol{\rho_{iB}} = \boldsymbol{\rho_{iF}} = z_i/2\Delta_i = \kappa_i\nu_i/2 = (P_3-1)(P_4-1)...(P_{i-1}-1)/(P_3P_4...P_i) = (1/P_i)\prod_{i=4}^{i}(P_{i-1}-1)/P_{i-1}$$

13. DEFINÍCIÓ Az **_i_-edik szűrési fokozattal bezárólag kiszűrt n_B és n_F sorszám-elemek gyakorisága ($\rho_{i\Sigma} = \rho_{iB\Sigma} = \rho_{iF\Sigma}$)**: az *i*. szűrési fokozatot megelőző fokozatokban már kiszűrt valamennyi n_B és n_F sorozat-tag gyakoriságának és az – *i*. szűrési fokozatban – utoljára kiszűrt tagok gyakoriságának összege a fokozat n_B és n_F periódus-párjaiban, illetve n_B vagy n_F sorszám-periódusaiban ($i>2$):

(f22) $$\boldsymbol{\rho_{i\Sigma}} = \boldsymbol{\rho_{iB\Sigma}} = \boldsymbol{\rho_{iF\Sigma}} = \rho_{(i-1)\Sigma} + \rho_i =$$
$$= 1/P_3 + (P_3-1)/(P_3P_4) + (P_3-1)(P_4-1)/(P_3P_4P_5) + ... + (P_3-1)(P_4-1)...(P_{i-1}-1)/(P_3P_4...P_i) =$$
$$= 1 + [-(P_3-1)/P_3 + (P_3-1)/(P_3P_4)] + (P_3-1)(P_4-1)/(P_3P_4P_5) + ... + (P_3-1)(P_4-1)...(P_{i-1}-1)/(P_3P_4...P_i) =$$
$$= 1 + [-P_4(P_3-1)/(P_3P_4) + (P_3-1)/(P_3P_4)] + (P_3-1)(P_4-1)/(P_3P_4P_5) + ... + (P_3-1)(P_4-1)...(P_{i-1}-1)/(P_3P_4...P_i) =$$
$$= 1 + [-(P_3-1)/(P_3P_4)](P_4-1) + (P_3-1)(P_4-1)/(P_3P_4P_5) + ... + (P_3-1)(P_4-1)...(P_{i-1}-1)/(P_3P_4...P_i) =$$
$$= 1 + [-(P_3-1)(P_4-1)/(P_3P_4) + (P_3-1)(P_4-1)/(P_3P_4P_5)] + (P_3-1)(P_4-1)(P_5-1)/(P_3P_4P_5P_6) + ... \\ ... + (P_3-1)(P_4-1)...(P_{i-1}-1)/(P_3P_4...P_i) =$$
$$= 1 + [-P_5(P_3-1)(P_4-1)/(P_3P_4P_5) + (P_3-1)(P_4-1)/(P_3P_4P_5)] + (P_3-1)(P_4-1)(P_5-1)/(P_3P_4P_5P_6) + ... \\ ... + (P_3-1)(P_4-1)...(P_{i-1}-1)/(P_3P_4...P_i) =$$
$$= 1 + [-(P_3-1)(P_4-1)/(P_3P_4P_5)](P_5-1) + (P_3-1)(P_4-1)(P_5-1)/(P_3P_4P_5P_6) + ... \\ ... + (P_3-1)(P_4-1)...(P_{i-1}-1)/(P_3P_4...P_i) =$$
$$= 1 + [-(P_3-1)(P_4-1)(P_5-1)/(P_3P_4P_5) + (P_3-1)(P_4-1)(P_5-1)/(P_3P_4P_5P_6)] + ... \\ ... + (P_3-1)(P_4-1)...(P_{i-1}-1)/(P_3P_4...P_i) =$$
$$= 1 + [-(P_3-1)(P_4-1)...(P_{i-1}-1)/(P_3P_4...P_{i-1}) + (P_3-1)(P_4-1)...(P_{i-1}-1)/(P_3P_4...P_{i-1}P_i)] =$$
$$= 1 + [-P_i(P_3-1)(P_4-1)...(P_{i-1}-1)/(P_3P_4...P_{i-1}P_i) + (P_3-1)(P_4-1)...(P_{i-1}-1)/(P_3P_4...P_{i-1}P_i)] =$$
$$= 1 + [-(P_3-1)(P_4-1)...(P_{i-1}-1)/(P_3P_4...P_{i-1}P_i)](P_i-1) = 1 - (P_3-1)(P_4-1)...(P_i-1)/(P_3P_4...P_i) =$$
$$= 1 - z_{i+1}/2\Delta_i = 1 - \kappa_{i+1}\nu_i/2 = 1 - \prod_{i=3}^{i}(P_i - 1)/P_i$$

A kiszűrt tagok előfordulásának gyakoriságát a ki nem szűrt tagok gyakorisága egészíti ki az n_B és n_F sorszám-periódusokban, illetve a periódus-párokban *1*-re.

14. DEFINÍCIÓ A **ki nem szűrt n_B és n_F sorszám-elemek gyakoriságának változása ($\beta_i = \beta_{iB} = \beta_{iF}$) az utoljára alkalmazott (_i_.) szűrési fokozatban**: az *i*. szűrési fokozat sorszám-periódusaiban, illetve n_B és n_F periódus-párjaiban a ki nem szűrt sorozat-tagok gyakoriságának csökkenése:

(f23) $$\boldsymbol{\beta_i} = \boldsymbol{\beta_{iB}} = \boldsymbol{\beta_{iF}} = -\boldsymbol{\rho_i} = -z_i/2\Delta_i = -\kappa_i\nu_i/2 = -(1/P_i)\prod_{i=4}^{i}(P_{i-1}-1)/P_{i-1}$$

15. DEFINÍCIÓ Az ***i*-edik szűrési fokozattal bezárólag ki nem szűrt n_B és n_F sorszám-elemek gyakorisága ($\beta_{i\Sigma} = \beta_{iB\Sigma} = \beta_{iF\Sigma}$)**: az *i*. szűrési fokozatot megelőző fokozatokban még ki nem szűrt sorozat-tagok gyakoriságának az – *i*. szűrési fokozatban – utoljára kiszűrt tagok gyakoriságával csökkentett értéke:

(f24) $\beta_{i\Sigma} = \beta_{iB\Sigma} = \beta_{iF\Sigma} = \beta_{(i-1)\Sigma} + \beta_i = 1 - \rho_{(i-1)\Sigma} - \rho_i = 1 - \rho_{i\Sigma} = z_{i+1}/2\Delta_i = \kappa_{i+1}\,\nu_i/2 = \prod_{i=3}^{i}(P_i - 1)/P_i$

(f25) $2\beta_{i\Sigma} = \beta_{iB\Sigma} + \beta_{iF\Sigma} = r_{cip} \sim r_{0i} = \pi^*_i/n_{Ai}$

(f26) $\beta_{iB\Sigma} = r_{ciBp} \sim r_{0Bi} = \pi_{Bi}/n_{Ai}$

(f27) $\beta_{iF\Sigma} = r_{ciFp} \sim r_{0Fi} = \pi_{Fi}/n_{Ai}$

(f28) $S^*_{0i} = \pi^*_i/A_i = n_{Ai}\,r_{0i}/A_i = r_{0i}/6 \sim (1/3)\prod_{i=3}^{i}(P_i - 1)/P_i = (1/2)\prod_{i=2}^{i}(P_i - 1)/P_i$

(f29) $S_{0Bi} = \pi_{Bi}/A_i = n_{Ai}\,r_{0Bi}/A_i = r_{0Bi}/6 \sim (1/6)\prod_{i=3}^{i}(P_i - 1)/P_i = (1/4)\prod_{i=2}^{i}(P_i - 1)/P_i$

(f30) $S_{0Fi} = \pi_{Fi}/A_i = n_{Ai}\,r_{0Fi}/A_i = r_{0Fi}/6 \sim (1/6)\prod_{i=3}^{i}(P_i - 1)/P_i = (1/4)\prod_{i=2}^{i}(P_i - 1)/P_i$