1. Bevezetés

A prímszámokat a közöttük fennálló különbség szerint párosíthatjuk. A számelmélet a végtelen lehetőségből kiemelten foglalkozik azokkal a prímszám-párokkal, amelyek tagjainak különbsége *2*, tehát bizonyosan egymást követik, régi dilemmaként vizsgálva, hogy ezek száma véges-e, vagy végtelen. Emellett bizonyos még, hogy a *(3; 7)* szám-pár kivételével a *4* különbségű prímszám-párok tagjai között sincsen prímszám, ezért ezek vizsgálata is kiemelt figyelmet érdemel. Bár itt csak a *2* különbségű ikerprímeket vizsgáljuk, várható, hogy – a fennálló analógiák miatt – a *4* különbségű prímszám-párokra vonatkozóan is az előbbiekéhez hasonló törvényszerűségek állapíthatók meg.

DEFINÍCIÓ 1.1. Tudjuk, hogy ha k értéke valamely természetes szám, akkor a $P_1, P_2, P_3, ..., P_s, ..., P_u, ...$ pozitív prímszám sorban az

(1) $1 < s < u$ feltétel teljesülése esetén

(2) $P_u - P_s = 2k$

Ha $k=1$, akkor $u=s+1$, és a $(P_s ; P_{s+1})$ szám-párt konvencionális meghatározás szerint ikerprímnek nevezzük [1]. Ha $k=2$, akkor általában szintén $u=s+1$, kivéve, ha $s=2$, mivel ekkor $u=s+2=4$.

A két eset között fennálló analógiák miatt javasolható, hogy a **2 különbségű prímszám-párok**at **I. rendű ikerprímek**nek ($k = 1$), míg a **4 különbségű prímszám-párok**at **II. rendű ikerprímek**nek nevezzük ($k = 2$, cousin primes, unokatestvér prímek: [2]).

Ha $k > 2$, akkor $u \geq s + 1$

ÉSZREVÉTEL 1.1. Ha 0-t és a természetes számsort 6 bennfoglalt, diszjunkt végtelen számtani részsorozatra osztjuk fel, akkor ezek közül 3 a páros, 3 pedig a páratlan számok sorozata lesz. Ezeknek a sorozatoknak a sorszámai legyenek: $n_A , n_B , n_C , n_D , n_E , n_F = 0, 1, 2, ...$

A páros számok sorozatai:

(3) $A = 6n_A$ $C = 6n_C + 2$ $E = 6n_E + 4$

A páratlan számok sorozatai:

(4) $B = 6n_B + 1$ $D = 6n_D + 3$ $F = 6n_F + 5$

A természetes számsor (3) és (4) szerinti sorozatokra való felosztásából számos, könnyen belátható következtetés vonható le, például:

KÖVETKEZMÉNY 1.1. Mivel $3|D$, ezért minden $i > 2$ esetben a P_i prímszám kizárólag a 3-mal nem osztható páratlan számokat magába foglaló B, vagy F sorozat tagja lehet. Eszerint a 2-től és 3-tól eltérő prímek két típusát lehet megkülönböztetni: a P_B és a P_F típusú prímek halmazát. Tetszőleges prímszám típusa a 6-tal való osztás maradéka alapján határozható meg:

(5) $P_B \not\equiv P_F \pmod 6$

(6) $P_{B1} \equiv P_{B2} \equiv P_{B3} \equiv ... \pmod 6$

(7) $P_{F1} \equiv P_{F2} \equiv P_{F3} \equiv ... \pmod 6$

KÖVETKEZMÉNY 1.2. Mivel a természetes számsor (3) és (4) szerinti részsorozataiban az egymást követő tagok különbsége 6, az ikerprímek mindkét tagja nem tartozhat sem a B, sem az F számtani sorozatba.

A $(3; 5)$ számpár kivételével az I. rendű ikerprímek kisebb tagja kizárólag az F, nagyobb tagja pedig kizárólag a B számtani sorozat tagja lehet. Ha a pár jele: $(F_{(PI)}; B_{(PI+2)})$, akkor ezek sorszámai:

(8) $6n_{F(PI)} + 5 + 2 = 6(n_{F(PI)} + 1) + 1 = 6n_{B(PI+2)} + 1$

$n_{F(PI)} + 1 = n_{B(PI+2)}$

A $(3; 7)$ számpár kivételével a II. rendű ikerprímek kisebb tagja kizárólag a B, nagyobb tagja pedig kizárólag az F számtani sorozat tagja lehet. Ha a pár jele: $(B_{(PII)}; F_{(PII+4)})$, akkor ezek sorszámai:

(9) $6n_{B(PII)} + 1 + 4 = 6n_{B(PII)} + 5 = 6n_{F(PII+4)} + 5$

$n_{B(PII)} = n_{F(PII+4)}$

KÖVETKEZMÉNY 1.3. A *(3; 5)* és a *(3; 7)* számpár kivételével az ikerprímek számtani középértéke 3-mal osztható:

(10) $[(6n_{BP}+1)+(6n_{FP}+5)]/2 = 3(n_{BP}+n_{FP}+1)$, ahol n_{BP} , $n_{FP} \neq 0$

Az I. rendű ikerprímek számtani középértéke kizárólag páros szám lehet. A *(3; 5)* számpár kivételével ennek jele legyen A_I , sorszáma n_{AI} :

(11) $A_I = [(6n_{B(PI+2)}+1)+(6n_{F(PI)}+5)]/2 = [(6n_{B(PI+2)}+1)+(6n_{B(PI+2)} - 6+5)]/2 = 6n_{B(PI+2)} = 6n_{AI}$

$n_{AI} = n_{B(PI+2)} = n_{F(PI)} + 1$

A II. rendű ikerprímek számtani középértéke kizárólag páratlan szám lehet. A *(3; 7)* számpár kivételével ennek jele legyen D_{II} , sorszáma n_{DII} :

(12) $D_{II} = [(6n_{B(PII)}+1)+(6n_{F(PII+4)}+5)]/2 = 3(2n_{B(PII)} +1) = 3(2n_{F(PII+4)} +1) = 6n_{DII} + 3 = 6n_{AII} + 3$

$n_{DII} = n_{AII} = n_{B(PII)} = n_{F(PII+4)}$

KÖVETKEZMÉNY 1.4. Az ikerprímeket számtani középértékeik egyértelműen reprezentálják (A_I , illetve D_{II}). Ezért a számtani középértékek (3), illetve (4) szerinti sorozatán belüli sorszám szintén egyértelműen reprezentálja az ikerprímeket: kettős reprezentáció a sorszámok (11), illetve (12) szerinti eseteiben.

A továbbiakban az észrevételek, következtetések és bizonyítások elsődlegesen az I. rendű ikerprímekre vonatkoznak, de hasonló vizsgálat alapján a két prím kapcsolat analógiái miatt ezek várhatóan a II. rendű ikerprímekre is adaptálhatók [3]. Vizsgálható az 5. fejezetben elemzett prímszám-tétel és az (I. rendű) ikerprím-sejtés összefüggésének kiterjeszthetősége az analógia alapján a II. rendű ikerprímekkel való összefüggésre is.

KÖVETKEZMÉNY 1.5.

A 2^P-1 formában felírható Mersenne-prímek [4, 5, 6] a $P_I = 2$ eset kivételével kizárólag a (4) szerinti *B* végtelen számtani sorozat tagjai, mivel *2* páratlan kitevőjű hatványai a *C,* páros kitevőjű hatványai pedig az *E* számtani sorozatba tartoznak. Ebből következően P_F típusú Mersenne-prím nincsen. Vizsgálható azonban, hogy milyen gyakran és milyen számban (van-e végtelen sok?) fordulnak elő pl.

- a $[(2^P-3); (2^P-1)]$ formájú I. rendű Mersenne-ikerprímek, pl. *(5; 7), (29; 31), ...* és
- a $[(2^P-1); (2^P+3)]$ formájú II. rendű Mersenne-ikerprímek, pl. *(7; 11), (127; 131), ...*

A továbbiakban ismertetett fokozatos szűrés módszere az I. rendű ikerprímek előfordulásának vizsgálatán túl, várhatóan egyéb prím kapcsolatok [7, 8] sűrűségének becslésére, illetve számának vizsgálatára is alkalmassá tehető.