2. Az ikerprímek elkülönítése a komplementer prímszita (CPS) alternatív változatának alkalmazásával

A CPS – a természetes számok közül az összetett számok „kiszitálásával” – Eratoszthenész szitájához hasonlóan, a visszamaradó prímek elkülönítésére alkalmas: meghatározza, és prímtényezőik szerint rendezi az összetett („kiszitált”) számok végtelen számtani sorozatait [9].

Mivel a *2*-től és a *3*-tól különböző **prímek** a (4) szerinti *B* vagy *F* végtelen számtani sorozat tagjai, a CPS alkalmazásával az A, C, D és E sorozatok kezdeti kiszitálása után a művelet az előbbi két sorozaton belül folytatható. A szokásostól eltérő jelölésrendszer mellett a jelzett sorozatokon belül a tagokat a tagok sorszáma egyértelműen reprezentálja, ezért az **alternatív változat** szerint a tagok szitálása elkülönítve a *B* és az *F* sorozat sorszámainak szitálására egyszerűsödik: **egyszerű reprezentáció**. Ehhez az egységes alternatív CPS két, egymástól eltérő formuláját kell alkalmazni: a P_B típusú prímek szitálásához a CPS_B, a P_F típusúakéhoz a CPS_F szita alkalmazása szükséges.

Az egységes CPS prímek szitálására alkalmas **grafikus formájá**t a Függelék IP 1. ábrája, alternatív változatának **táblázatos formájá**t 1. táblázata mutatja be. Az *n* független változó az 1. ábra szerinti számsíkon a *0* helyek sorszáma, a *p* független változó az egyes *0* helyekről kiinduló, az összetett számokat a *0* hellyel összekötő egyenesek – iránytangenstől függő – sorszáma: *p* előjele az összekötő egyenes jobb, vagy bal dőlésirányától függ. A CPS pozitív prímek szitálására alkalmas alternatív változatának **matematikai formája** a (13) összefüggés (CPS_B^+) és a (21) összefüggés (CPS_F^+) együttesen.

Az összetett számokat reprezentáló sorszámok (függő változók, alsó indexben $_ö$ jelöléssel) és a független változók, előjeleiket felső indexként feltüntetve:

$$\begin{array}{llllll}
n_{Bö} = n_{Bö}^+,\ n_{Bö}^- & \text{, ahol} & n_{Bö}^+ & = n_{Bö+}(n^+, p^+) & \wedge & n_{Bö-}(n^-, p^-) \\
 & \text{és} & n_{Bö}^- & = n_{Bö}^-(n^+, p^-) & \vee & n_{Bö}^-(n^-, p^+) \\
n_{Fö} = n_{Fö}^+,\ n_{Fö}^- & \text{, ahol} & n_{Fö}^- & = n_{Fös}(n^+, p^-) & \wedge & n_{Föz}(n^-, p^+) \\
 & \text{és} & n_{Fö}^+ & = n_{Fö}^+(n^+, p^+) & \vee & n_{Fö}^+(n^-, p^-) \\
 & \text{, de} & n_{Fö}^+ & \text{esetében } n^- \neq -1 \text{ és} & & n^+ \text{ minden nem negatív egész szám.}
\end{array}$$

Ha valamely **prímszám-kombináció**nak a (3), vagy (4) szerinti sorozatok egyikébe tartozó egész függvényértéke azt egyértelműen reprezentálja, akkor a CPS megfelelően módosított alternatív változatával/változataival a prímszám-kombináció szitálása elvégezhető. Mivel ekkor a függvényértékek sorszámaival végzünk műveleteket, a megfelelő sorszámok a prímszám-kombináció **kettős reprezentáció**ját jelentik. Eszerint a CPS alkalmassá tehető az I. rendű és a II. rendű ikerprímek szitálására is: az 1.3. és 1.4. Következmény szerint az I. és II. rendű ikerprímeket számtani középértékük, ezt pedig a *3*-mal osztható páros, illetve páratlan számok sorozatán belüli sorszámuk egyértelműen reprezentálja. Az I. rendű ikerprímek szitálására adaptált alternatív CPS táblázatos formája a Függelék IP 7. táblázata, a II. rendű ikerprímek szitálása az 1. táblázat szerint végezhető. A 7. táblázatban feltüntetett sorszámok a legalább *1* összetett tagot tartalmazó számpárok középértékeinek n_A sorszámai. II. rendű ikerprímek szitálása esetén az 1. táblázat sorszámai (az ott alkalmazott jelölések helyett) a legalább *1* összetett tagot tartalmazó számpárok középértékeinek n_D sorszámai.

SEGÉDTÉTEL 2.1. Ha a sorszámok (függő változók) alsó indexeiben $_P$ prím, $_ö$ összetett szám reprezentációját jelöli, akkor a CPS_B alternatív változatával végezhető elkülönítéshez a (4) szerinti *B* sorozatban a pozitív prím és összetett számok sorszámára a következő összefüggés áll fenn (a függő és a független változók előjeleit felső indexként feltüntetve):

(13) $n_{BP}^+ \neq n_{Bö}^+ = p^+(6n^+ + 1) + n^+ \ \wedge\ p^-(6n^- + 1) + n^-$

BIZONYÍTÁS 2.1. (4) szerint a $B_ö^+$ pozitív összetett szám két-tényezős felbontása:

(14) $B_ö^+ = 6n_{Bö}^+ + 1 = (6n + a)(6p + b) = 6(6np + bn + ap) + ab$

A tényezők szorzata *B* sorozatba tartozó pozitív összetett szám, ha előjelük megegyezik, és teljesül az $ab = 1$ feltétel is.

Ha a és b egész szám, melyekre $0 \leq |a|, |b| \leq 5$, akkor a két tényező azonos előjele n és p azonos előjele esetében áll fenn. Ez a következő esetekben teljesülhet:

$\boxed{1.}$ $B_ö^+$ mindkét tényezője a B számtani sorozat tagja:

(15) $6n_1 + a_1 = B_a$ $\quad 6p_1 + b_1 = B_b$

$a_1 = b_1 = 1$ $\quad a_1b_1 = 1$ $\quad$ ($a_1 = b_1 = -1$ mellett a $\boxed{2.}$ eset teljesül.)

$B_{ö1} = 6(6n_1p_1 + n_1 + p_1) + 1$

$n_{Bö1} = 6n_1p_1 + n_1 + p_1 = p_1(6n_1 + 1) + n_1$

$n_{Bö1}$ tehát a (13) összefüggésnek megfelelően azonos előjelű B_a és B_b tényezők mellett pozitív egész szám:

$n_{Bö1}^+ = n_{Bö+}(n_1^+, p_1^+) \wedge n_{Bö-}(n_1^-, p_1^-)$ $\quad B_{ö1}^+ = (6n_{Bö+}+1) \wedge (6n_{Bö-}+1)$

$\boxed{2.}$ $B_ö^+$ mindkét tényezője az F számtani sorozat tagja:

(16) $6n_2 + a_2 = F_a$ $\quad 6p_2 + b_2 = F_b$

$a_2 = b_2 = 5$ $\quad a_2b_2 = 25 = 6*4 + 1$ $\quad$ ($a_2 = b_2 = -5$ mellett az $\boxed{1.}$ eset teljesül.)

$B_{ö2} = 6(6n_2p_2 + 5n_2 + 5p_2 + 4) + 1$

$n_{Bö2} = 6n_2p_2 + 5n_2 + 5p_2 + 4$

(17) $n_{Bö2} = n_{Bö1}$, ha elvégezzük a következő helyettesítéseket:

$n_2 = -(n_1 + 1)$ és $p_2 = -(p_1 + 1)$

$n_{Bö2} = 6(n_1 + 1)(p_1 + 1) - 5(n_1 + 1) - 5(p_1 + 1) + 4 = 6n_1p_1 + n_1 + p_1 = p_1(6n_1 + 1) + n_1$

$n_{Bö2}$ tehát a (13) összefüggésnek megfelelően azonos előjelű F_a és F_b tényezők mellett szintén pozitív egész szám:

$n_{Bö2}^+ = n_{Bö+}(n_2^+, p_2^+) \wedge n_{Bö-}(n_2^-, p_2^-)$ $\quad B_{ö2}^+ = (6n_{Bö+}+1) \wedge (6n_{Bö-}+1)$

Q.E.D.

Az alternatív komplementer prímszitával tehát a B számtani sorozatból (13) felhasználásával elkülöníthető pozitív összetett számok sorszámai:

(18) $n_{Bö+} = p^+(6n^+ + 1) + n^+$

(19) $n_{Bö-} = p^-(6n^- + 1) + n^-$

(20) $n_{BP}^+ \neq n_{Bö}^+ = n_{Bö+}(n^+, p^+) \wedge n_{Bö-}(n^-, p^-)$

A B számtani sorozat negatív összetett számaira vonatkozóan l. a Függelék IP 1. ábráját és 1. táblázatát:

$n_{BP}^- \neq n_{Bö}^- = n_{Bö}^-(n^+, p^-) \vee n_{Bö}^-(n^-, p^+)$

SEGÉDTÉTEL 2.2. A CPS_F alternatív változatával végezhető elkülönítéshez a (4) szerinti F sorozatban a pozitív prím és az összetett számok sorszámára a következő összefüggés áll fenn:

(21) $n_{FP}^+ \neq n_{Fö}^+ = p^+(6n^+ + 5) + n^+ \vee p^-(6n^- + 5) + n^-$, ahol $n^+ = -(p^- + 1)$ és $p^+ = -(n^- + 1)$

, de $n^- \neq -1$ és n^+ minden nem negatív egész szám értékét felveheti.

BIZONYÍTÁS 2.2. (4) szerint az $F_ö^+$ pozitív összetett szám két-tényezős felbontása:

(22) $F_ö^+ = 6n_{Fö}^+ + 5 = (6n+a)(6p+b) = 6(6np + bn + ap) + ab$

A tényezők szorzata F sorozatba tartozó pozitív összetett szám, ha előjelük megegyezik, és teljesül az $ab = 5$ feltétel is.

Ha a és b egész szám, melyekre: $0 \leq |a|, |b| \leq 5$, akkor a két tényező azonos előjele n és p azonos előjele esetében áll fenn. A tényezők szimmetriájából következően választható, hogy $a=5$ és $b=1$, vagy $a=-5$ és $b=-1$ legyen. Ezért $F_ö$ egyik tényezője a (4) szerinti F, másik tényezője a B számtani sorozat tagja, a következő esetek szerint:

$\boxed{1.}$ $F_ö$ mindkét tényezője negatív (F^- és B^-), tehát azok sorszámai is negatív egész számok (n^- és p^-):

(23) $6n^- + 5 = F^-$ $\quad 6p^- + 1 = B^-$

$F_{ö1} = 6(6n^-p^- + n^- + 5p^-) + 5$

$n_{Fö1} = p^-(6n^- + 5) + n^-$

$n_{Fö1}$ tehát a (21) összefüggésnek megfelelően az $(n^-; p^-)$ egész értékek mellett pozitív egész szám.

$\boxed{2.}$ $F_ö$ mindkét tényezője pozitív (F^+ és B^+), tehát azok sorszámai is pozitív egész számok (n^+ és p^+):

(24) $6n^+ + 5 = F^+$ $\qquad 6p^+ + 1 = B^+$

$F_{ö2} = 6(6n^+p^+ + n^+ + 5p^+) + 5$

$n_{Fö2} = p^+(6n^+ + 5) + n^+$

(25) $n_{Fö2} = n_{Fö1}$, ha elvégezzük a következő helyettesítéseket:

$n^+ = -(p^- + 1)$ és $p^+ = -(n^- + 1)$

$n_{Fö2} = -(n^- + 1)[-6(p^- + 1) + 5] - (p^- + 1) = (n^- + 1)(6p^- + 1) - p^- - 1 = p^-(6n^- + 5) + n^-$

$n^+ = 0$ esetben $\qquad n_{Fö}{}^+ = 5p^+ = 5, 10, 15, ...$, ami az alternatív CPS_F sorozata.

$n^- = -1$ esetet megengedve $n_{Fö}{}^+$ felvehetné 0 és minden pozitív egész szám értékét, ami az alternatív CPS_F-ben nem lehetséges.

Q.E.D.

Mivel - a $(3;\ 7)$ prím pár kivételével - a II. rendű (4 különbségű, „unokatestvér”) ikerprímek tagjainak és számtani középértékének a (4) összefüggés szerinti sorszámai megegyeznek, a (13), (20) és (21) egyenlőség együtt, mint a CPS alternatív változata, meghatározza azokat a pozitív

(26) $n_{DII}{}^+ \neq n_{Dö}{}^+ = n_{Bö+}, n_{Bö-}, n_{Fö}{}^+$ sorszámokat, amelyek nem lehetnek II. rendű ikerprím számtani középértékek sorszámai. Az $(n^+;\ p^+)$ és $(n^-;\ p^-)$ szám-párok által meghatározott lehetséges $n_{Bö+}$ és $n_{Bö-}$, illetve $n_{Fö}{}^+$ összetett szám sorszámok tehát (26) szerint együtt a pozitív II. rendű ikerprímek, de (20) és (21) szerint külön a B és külön az F végtelen számtani sorozatba tartozó pozitív prímek szitálását is jelentik. A Függelék IP 1. táblázata a negatív II. rendű ikerprímek és prímek szitálását is bemutatja.

Az I. rendű ikerprímek F sorozatba tartozó tagjának sorszáma 1-gyel kisebb, mint a B sorozatba tartozóé, illetve a számtani középértéké, ezért azokat az $n_{Aö}{}^+$ sorszámokat, amelyek nem lehetnek I. rendű ikerprím számtani középértékek sorszámai, a (13), (20) és (21) egyenlőséggel együtt az

(27) $n_{AI}{}^+ \neq n_{Aö}{}^+ = n_{ABö}{}^+, n_{AFö+1}{}^+$ összefüggés határozza meg, ahol:

$n_{ABö}{}^+ = n_{Bö}{}^+ = n_{ABö+}, n_{ABö-} = n_{Bö+}, n_{Bö-}$ az n és p független változó előjele szerint, továbbá:

$n_{AFö+1}{}^+ = n_{Fö}{}^+ + 1 = p^-(6n^- + 5) + n^- + 1$, ha n^- és p^- negatív egész, de $n^- \neq -1$.

Az $(n^+;\ p^+)$ és $(n^-;\ p^-)$ szám-párok által meghatározott lehetséges $n_{Bö+}$, $n_{Bö-}$ és $n_{Fö}{}^+ + 1$ összetett szám sorszámok tehát (27) szerint együtt az I. rendű ikerprímek szitálását jelentik.

A CPS alternatív változata az alkalmazott reprezentáció alapján az összetett számok sorszámait végtelen számtani sorozatokba rendezve, az eratoszthenészi szitának megfelelően tartalmazza. Ezeknek a végtelen számtani sorozatoknak abszolút értékben legkisebb tagjai, amelyek nem részei az alternatív CPS-nek, kétszeresen lefedik a pozitív és negatív egész számok sorát. A sorozatok más tagjai az alternatív CPS-ben egyszer, vagy többször fordulnak elő. Ez jelenti **a szitálás hátrányá**t, mivel a nem diszjunkt sorozatokban többször előforduló tagok miatt, kizárólag ezek felhasználásával, nehéz meghatározni a sorozatokban nem szereplő - valódi és potenciális prímeket, illetve ikerprímeket reprezentáló - sorszámoknak a szitálás fázisaihoz rendelhető átlagos sűrűségét.

A **hátrány kiküszöbölésé**re a CPS-sel összhangban álló, a „kiszitált” végtelen számtani sorozatok tagjaival megegyező, de diszjunkt végtelen számtani sorozatok „kiszűrése” szükséges. A művelet végzésére algoritmus szerint alkalmazott **fokozatos szűrés** javasolható, ami fokozatonként lehetőséget kínál a kiszűrt és a még ki nem szűrt elemek átlagos sűrűségének számítására. Mivel pedig az utóbbi sűrűség fokozatonként csökken, a fokozatonként szűrt, pozitív irányban végtelen intervallum alsó határa pedig növekszik, az alsó határnál kisebb, a további fokozatokban már ki nem szűrhető, de a számítottnál nagyobb átlagsűrűségű elemek számának közelítő meghatározása is lehetővé válik.

A következő fejezetekben a pozitív számok körében végezzük az ikerprímekre vonatkozó vizsgálatot (az előjelet felső indexként nem jelezzük), ami a fentiek figyelembe vételével a negatív számokra is kiterjeszthető. (Az előjelekre vonatkozóan l. még a Függelék IP 1. ábráját és 1. - 7. táblázatait.)