4. A kiszűrt és ki nem szűrt elemek eloszlása

ÉSZREVÉTEL 4.1. A kezdeti szűrési fokozatokban elvégzett műveletek során ki nem szűrt középérték sorszámok táblázatai (Függelék IP, 8.-11. táblázat) azok $[0, \Delta_{i+1})$ intervallumát úgy mutatják be, hogy abban

- nem szerepelnek az *i.* fokozatot megelőzően már kiszűrt sorszámok és a $(0, j_{i-1}]$ részintervallum megelőző fokozatokban ki nem szűrhető, I. rendű ikerprímeket reprezentáló elemei;
- ki van emelve (meg van jelölve) az *i.* fokozatban kiszűrésre kerülő sorozatoknak az intervallumba eső P_{i+1} számú tagja, és ezek között, ha van, eltérő jelöléssel van ellátva a $(0, j_i]$ részintervallumba tartozó ki nem szűrhető tag;
- meg vannak jelölve az *(i+1).* fokozatban kiszűrésre (kiemelésre) kerülő sorozatok 1. tagjai;
- meg vannak jelölve a (j_i , n_{Ai}) részintervallum I. rendű ikerprímeket reprezentáló elemei.

A 3.1.3. Definíció és a 3.1.1. Észrevétel figyelembe vételével megállapítható, hogy a $(0; \Delta_i]$ intervallum nem tekinthető az *i.* fokozattal bezárólag végzett szűrés periódusának. Ennek oka az, hogy míg a $(0, j_i]$ részintervallum tartalmaz, a $[\Delta_i-j_i , \Delta_i)$ részintervallum pedig nem tartalmaz ki nem szűrhető (I. rendű ikerprímeket reprezentáló) elemeket, addig a $(0; \Delta_i]$ intervallummal megegyező elemszámú periódusok a jelzett részintervallumoknak megfelelő, azonos elemszámú részintervallum párokat foglalnak magukba, amelyekben kizárólag kiszűrt elemek fordulnak elő (l. a 4.1. Tételt és a 4.1. Bizonyítást is).

Az *i.* szűrési fokozatot követően a $(P_{i+1}^2-1)/6$ sorszámnál kisebb, ki nem szűrt sorszámok nem kerülnek már kiszűrésre, ezek tehát bizonyosan ikerprím számtani középértékek sorszámai, ikerprímeket reprezentálnak. Ezek a sorszámok azonban sorrendben valamely további szűrési fokozatban kiszűrésre kerülő sorozatok kezdő sorozatának 1. tagjai lesznek, hiszen a (27) összefüggés szerint $n_{AFö+1}^{+}$ minden pozitív egész szám értékét felvehetné, ha az $n^{-} = -1$ lehetőséget nem zárnánk ki. A lehetőség kizárásával biztosítjuk azt, hogy az alternatív, sorszámokra módosított CPS nem tartalmazza az I. rendű ikerprím számtani középértékek n_{AI} sorszámait. Ez az alternatív CPS ugyanis olyan, a pozitív és negatív számtartományban végtelen számtani sorozatokból áll, amelyeknek abszolút értékben legkisebb tagjai ugyan kétszeresen lefedik a *0*-tól különböző egész számok sorát, de ezek a tagok nem részei az alternatív CPS-nek (Függelék IP, 7. táblázat).

Ha tehát $3 < s \le i$ esetben $(P_s ; P_{s+1})$ I. rendű ikerprím $(P_{s+1}=P_s+2)$, akkor az *s.* szűrési fokozatban a kezdő sorozat csak 1. tagja (j_s) kivételével szűrhető ki, mivel az 1. tag:

(43) $j_s = (P_s+P_{s+1})/12 = (P_s+1)/6 < (P_s^2-1)/6 = n_{As} \le n_{Ask} < T_{0/s}$

, ahol n_{Ask} az s. fokozatban kiszűrésre kerülő legkisebb elem.

Az I. rendű ikerprímet reprezentáló j_s sorszám minden további *i.* szűrési fokozatban már az n_A sorszámok $(0, j_i]$ intervallumának kiszűretlen eleme marad.

TÉTEL 4.1. $\Delta_{i/m} = (m+1)\Delta_i$ esetben és *-1* -től különböző egész *m* értékek mellett, az I. rendű ikerprímeket reprezentáló n_{AI} sorszámok $n_{AI/1} < n_{AI/2} <\ldots< n_{AI/r}(i, m) < \Delta_{i/m} < n_{AI/t}(i, m) <\ldots$ sorában végtelen sok esetben ismétlődnek olyan, legfeljebb *1* I. rendű ikerprímet reprezentáló elemet $(\Delta_{i/m})$ magában foglaló hézagok, hogy az $n_{AI/t}(i, m) - n_{AI/r}(i, m)$ különbség tetszőlegesen nagy.

BIZONYÍTÁS 4.1. A 3.1.1. és a 4.1. Észrevételnek megfelelően megállapítható, hogy $\Delta_{i/m} = (m+1)\Delta_i$ esetben és *-1* -től különböző egész *m* értékek mellett az n_A sorszámok $(m\Delta_i+j_i , \Delta_{i/m}+j_i]$ periódusainak $[\Delta_{i/m}-j_i , \Delta_{i/m})$ és $(\Delta_{i/m} , \Delta_{i/m}+j_i]$ részintervallumaiban kizárólag kiszűrt elemek fordulnak elő. Ennek oka az, hogy a $(j_i , \Delta_i+j_i]$ periódus $[\Delta_i-j_i , \Delta_i)$ részintervallumában az azonos elemszámú $(0, j_i]$ intervallumban kiszűrt és ki nem szűrt elemeknek a $T_{0/i}=\Delta_i/2$ számtani középértékre vonatkozó, a jelzett részintervallumot alkotó párjai a CPS_F (27) szerinti kritériumának megfelelően kizárólag kiszűrt elemek lehetnek. Ez utóbbiaknak a Δ_i számtani középértékre vonatkozó párjai a szintén azonos elemszámú $(\Delta_i , \Delta_i+j_i]$ részintervallumban is csak kiszűrt elemek lehetnek, ezért a jelzett részintervallumoknak megfelelő – periódusonként ismétlődő – részintervallumokban is kizárólag kiszűrt elemek fordulnak elő. Ezek a részintervallumok a további szűrési fokozatokban nem szűkülnek, sőt *m* meghatározott érékeinél (a fokozatok sorszámának megfelelően) bővülnek ($i \ge 3$):

(44) $\Delta_i = \Delta_{i/0} < \Delta_{i/1} < \Delta_{i/2} < \ldots < P_{i+1}\Delta_i = \Delta_{i+1} = \Delta_{i+1/0}$

$\Delta_{i+1/0} < (P_{i+1}+1)\Delta_i < (P_{i+1}+2)\Delta_i < \ldots < \Delta_{i+1/1} = 2P_{i+1}\Delta_i < \ldots < \Delta_{i+1/2} < \ldots$

$\Delta_i \mid \Delta_{i/0}, \Delta_{i/1}, \Delta_{i/2}, \ldots, \Delta_{i+1/0}, \Delta_{i+1/1}, \Delta_{i+1/2}, \ldots$

$\lim_{i,m\to\infty} \Delta_{i/m} = \lim_{i,m\to\infty} (m+1)P_3P_4 \ldots P_i = \infty$

(45) $\lim_{i\to\infty} j_i = \lim_{i\to\infty} \mathrm{int}[(P_i+1)/6] = \infty$

A magasabb fokozatok jelzett részintervallumai az alacsonyabb fokozatok meghatározott részintervallumait magukba foglalják.

A páros részintervallumok $\Delta_{i/m}$ számtani középértékei a 6.1.1. $\boxed{3.}$ Bizonyítás szerint az *i.* fokozattal bezárólag ki nem szűrt, potenciálisan I. rendű ikerprímeket reprezentáló, végtelen számtani sorozatot képező elemek. A további fokozatokban ebből a sorozatból az I. rendű ikerprímeket nem reprezentáló elemek kisebb sűrűségű végtelen sorozatait szűrjük ki, amelyek egyike sem azonos a szűrt sorozat ki nem szűrt részsorozataival. A ki nem szűrt elemek sűrűsége tehát a további fokozatokban csökken, de *m* végtelen sok $m_{i/I}$ értéke esetén valódi I. rendű ikerprímeket reprezentálnak. Ebből következően, az egész *m* értékeknek megfelelően (de $m \neq -1$) végtelen sok olyan részintervallum létezik, amelyekben legfeljebb *1* ki nem szűrhető elem $[(m_{i/I}+1)\Delta_i = \Delta_{i/Im} = n_{AI/s}(i, m_{i/I})]$ fordul elő.

(46) $n_{AI/r}(i, m) \leq \Delta_{i/m} - j_i < \Delta_{i/m} = n_{A/s}(i, m) < \Delta_{i/m} + j_i \leq n_{AI/t}(i, m)$

A $[\Delta_{i/m}-j_i, \Delta_{i/m}+j_i]$ intervallumok elemszáma, *i* rögzített és *m* lehetséges értékei mellett:

(47) $j_i - (-j_i) + 1 = 2j_i + 1$

Az $[n_{AI/r}(i, m), n_{AI/t}(i, m)]$ intervallumok elemszáma, *i* rögzített és *m* lehetséges értékei mellett:

(48) $\mu_{/t-r}(i, m) = n_{AI/t}(i, m) - n_{AI/r}(i, m) + 1 \geq 2j_i + 1$

$\mu_{/t-r}(i, m) > 2j_i$

Mivel *i* értéke nem korlátos, a $[\Delta_{i/m}-j_i, \Delta_{i/m}+j_i]$ intervallumok *i* értékével növekvő elemszáma sem korlátos:

(49) $\lim_{i\to\infty} (1+2j_i) = \lim_{i\to\infty} \{1+2\mathrm{int}[(P_i+1)/6]\} = \infty$

(48) szerint $2j_i+1$ a $\mu_{/t-r}(i, m)$ elemszámú $[n_{AI/r}(i, m), n_{AI/t}(i, m)]$ intervallumok elemszámának alsó korlátja. Ezért (49)-ből következően - *i* minden korláton túl növekvő értékei esetén - léteznek olyan, legfeljebb *1* I. rendű ikerprímet reprezentáló elemet (a $\Delta_{i/m}$ elemet) magába foglaló hézagok, hogy az $n_{AI/t}(i, m) - n_{AI/u}(i, m)$ különbség tetszőlegesen nagy.

Q.E.D.

ÉSZREVÉTEL 4.2. A *2.* szűrési fokozatban az I. rendű ikerprímeket potenciálisan reprezentáló n_A sorszámok végtelen sorozathalmazát a $(0, 5]$ intervallumra és folytatólag $\Delta_3 = 5$ elemű periódusokra bontjuk. A *3.* szűrési fokozatban kiszűrjük az intervallum és a periódusok 4. elemének, valamint – a $(0, 5]$ intervallum kivételével – 1. elemének végtelen számtani sorozatait. Ebből következően az I. rendű ikerprím számtani középértékek sorszámainak utolsó számjegye *4, 6, 9* és – az *1* kivételével – *1* nem lehet. A kivétel oka egyfelől az, hogy *1* a ... *-9, -4, 1, 6, 11,* ... végtelen számtani sorozatnak legkisebb abszolút értékű tagja, és ezért – a 4.1. Észrevétel alapján – nem tartozik az alternatív CPS szerint kiszűrésre kerülő elemekhez. Másfelől, mivel $(P_3;\ P_4)$ I. rendű ikerprím, melynek számtani középérték sorszáma *1*, a (43) összefüggés szerint értéke kisebb, mint a fokozatnak megfelelő prímszám négyzetének sorszáma, ezért nem szűrhető ki:

(50) $j_3 = (P_3+P_4)/12 = (P_3+1)/6 = 1 < (P_3^2-1)/6 = 4 = n_{A3} = n_{A3k} > T_{0/3} = 2{,}5$

Az I. rendű ikerprím számtani középérték sorszámok utolsó számjegye tehát *0, 2, 3, 5, 7* vagy *8.* Mivel ezzel a tulajdonsággal egyenlő arányban a fokozatos szűrés során kiszűrt végtelen számtani sorozatok elemei is rendelkeznek, a ki nem szűrt, potenciálisan I. rendű ikerprímeket reprezentáló n_A sorszámok végtelen elemű halmazában a felsorolt számjegyekre végződő elemek előfordulásának gyakorisága megegyezik. Ebből következően a *(3; 5)* ikerprímtől különböző I. rendű ikerprím szám-párok tagjainak utolsó számjegye *1, 3, 7,* vagy *9*, de a (4) szerinti *F* sorozatba tartozó kisebb tag utolsó számjegye *3,* míg a *B* sorozatba tartozó nagyobb tag utolsó számjegye *7* nem lehet. *6*-tal osztható számtani középértékük utolsó számjegye *0, 2,* vagy *8.*

ÉSZREVÉTEL 4.3. Az *i.* szűrési fokozattal bezárólag ki nem szűrt elemek $G_{i\sum}$ gyakorisága a fokozat periódusain belül az ezt meghaladó és az ennél kisebb sűrűségű részintervallumok sűrűségének átlaga. A részintervallumok eltérő sűrűsége a megelőző fokozatok nagyobb átlagsűrűségű, de kisebb elemszámú periódusainak szűréséből következik. Ennek megfelelően az *i.* szűrési fokozattal bezárólag ki nem szűrt elemek $n_A=0$ -tól számított átlagos sűrűsége kezdetben csökken, majd hullámzóan változik, és a szimmetrikus periódusok határáig figyelembe véve, $G_{i\sum}$ értékét felülről közelíti: l. a (116), (117) és (118) összefüggést.

Az *i.* fokozat szimmetrikus periódushatárai a megelőző szűrési fokozatok szimmetrikus periódushatárainak prímtényezős szorzatai:

(51) $mT_{0/i} = mP_i\, T_{0/(i-1)} = mP_i\, P_{i-1}\, T_{0/(i-2)} = \ldots = mP_i\, P_{i-1} \ldots P_4\, P_3 /2 = mP_i\, P_{i-1} \ldots {*7*2{,}5}$

$m\Delta_i = mP_i\, \Delta_{i-1} = mP_i\, P_{i-1}\, \Delta_{i-2} = \ldots = mP_i\, P_{i-1} \ldots P_4\, P_3 = mP_i\, P_{i-1} \ldots {*7*5}$

ÉSZREVÉTEL 4.4. Az n_A sorszámok $(0, \infty)$ intervallumát egy $n_{AK} > 1$ sorszám két részre osztja. Jelöljük a $(0, n_{AK}]$, illetve az (n_{AK}, ∞) intervallumban ki nem szűrhető elemek átlagos sűrűségét R_{0K}, illetve R_∞ szimbólummal, melyekről megállapítható, hogy

(52) $1 \geq R_{0K} > R_\infty$

A $(0, n_{AK}]$ intervallumban korlátos számú számtani sorozat korlátos számú tagja szűrhető ki, míg az (n_{AK}, ∞) intervallumban ugyanezeknek a sorozatoknak végtelen sok további tagja mellett ezektől különböző végtelen sok diszjunkt végtelen számtani sorozat tagjai is. A $(0, n_{AK}]$ intervallumban ki nem szűrhető elemek átlagos R_{0K} sűrűsége n_{AK} növekvő értékével csökkenő tendenciájú. Ez azt jelenti, hogy $0 < n_{AK1} < n_{AK2}$ esetben a $(0, n_{AK2}]$ intervallum R_{0K2} átlagos sűrűsége akkor kisebb a $(0, n_{AK1}]$ intervallum R_{0K1} átlagos sűrűségénél, ha az $(n_{AK1}, n_{AK2}]$ intervallum $R_{cK1/2}$ átlagos sűrűsége R_{0K2} -nél is kisebb. A követelmény teljesül, ha az $(n_{AK1}, n_{AK2}]$ intervallum elegendően nagy ahhoz, hogy abban a $(0, n_{AK1}]$ intervallumban kezdődő kiszűrt sorozatok tagjainak átlagsűrűségéhez további kiszűrésre kerülő sorozat/ok tagjainak átlagsűrűsége adható.

(53) $R_{0K2}\, n_{AK2} = R_{0K1}\, n_{AK1} + R_{cK1/2}(n_{AK2} - n_{AK1})$

$R_{0K1} > R_{0K2} > R_{cK1/2}$

A ki nem szűrhető elemek, így az n_{AK}-nál kisebb ki nem szűrhető elemek is, I. rendű ikerprímeket reprezentálnak. Ebből következően, $\pi_2(x)$-szel jelölve az x-nél nem nagyobb számtani középértékű – és $\pi_2^*(x)$-szel jelölve az x-nél nem nagyobb, 6 -tal osztható számtani középértékű – I. rendű ikerprímek számát:

(54) $\pi_2(6n_{AK}) -1 = \pi_2^*(6n_{AK}) = R_{0K}\, n_{AK} = Q^*_{0K}\, A_K$

Mivel a $(3; 5)$ ikerprím számtani középértéke nem tartozik a (3) szerinti A sorozatba, az egyenlőség bal oldalán az I. rendű ikerprímek $\pi_2(6n_{AK})$ számából 1-et le kell vonni. Pl. az n_A sorszámok $(0, 3]$ intervallumában, ahol $n_{AK}=3$:

(55) $R_{0K}(3) = \pi_2^*(18)/3 = 6\, Q^*_{0K}(18) = 1$

$Q^*_{0K}(18) = [\pi_2(18)-1]/18 = 1/6$

A 4.2. Észrevételben foglaltak indokolják, hogy $(0, 3]$ az n_A sorszámok legnagyobb intervalluma, amelyben az I. rendű ikerprímeket reprezentáló elemek sűrűsége maximális. Ez a $(0, 18]$ számintervallum 6-tal osztható számtani középértékű I. rendű ikerprím sűrűségének felel meg.

Míg tehát a valódi I. rendű ikerprímeket reprezentáló elemek R_{0K} átlagsűrűsége növekvő n_{AK} intervallum határ mellett 1 értéktől csökkenő tendenciájú, addig a csak potenciális I. rendű ikerprímet reprezentáló n_A sorszámok Δ_i terjedelmű periódusaira jellemző, (42) szerinti $G_{i\sum}$ gyakoriság állandó, amely azonban növekvő i mellett monoton csökken (l.: Függelék IP, 12. és 13/a. táblázat). Szűrési fokozatonként létezik tehát olyan n_{AKi} intervallum határ, amelynél a kétféle átlagsűrűség megegyezik. Ebből következően léteznek továbbá olyan $n_{AKi<} < n_{AKi} < n_{AKi>}$ intervallum határok is, hogy

(56) $R_{0Ki<} > R_{0Ki} = G_{i\sum} > R_{0Ki>} > R_\infty$

Mivel az *i.* szűrési fokozatban és azt követően kiszűrésre kerülő elemek az n_{Ai} sorszámnál nem kisebbek, és a $G_{i\sum}$ gyakoriság csak az i. fokozat periódusaira jellemző:

(57) $j_i = \mathrm{int}[(P_i+1)/6] < n_{AKi} \approx n_{Ai} = (P_i^2-1)/6$ $\qquad n_{AKi} = \xi_{*i}\, n_{Ai}$

$n_{AKi} = \pi_2^*(A_i)/G_{i\sum}$ $\qquad \pi_2^*(A_i) = G_{i\sum}\, \xi_{*i}\, n_{Ai}$

R_{0i} szimbólummal jelölve a $(0,\ n_{Ai}]$ intervallum ki nem szűrhető – tehát valódi I. rendű ikerprímet reprezentáló – elemeinek átlagos sűrűségét:

(58) $R_{0Ki} = G_{i\Sigma} \approx \xi_{*i}\, G_{i\Sigma} = \xi_{*i}\, R_{0Ki} = R_{0i} = \pi_2^{\,*}(A_i)/n_{Ai} = 6Q^{*}_{0i} > R_\infty$

A $G_{i\Sigma}$ számított és R_{0i} tényleges sűrűség eltérésére jellemző $\xi_{*i} = R_{0i}\ /G_{i\Sigma}$ faktor i sorszám szerinti változását a Függelék IP 13/a. táblázata mutatja be.

$i \geq 3$ esetben az előzőek szerint:

(59) $R_{0K}(3) = 1 > R_{0K}(4) = R_{03} = \pi_2^{\,*}(24)/4 = 6Q^{*}_{03} = 0{,}75 \geq R_{0i} \approx G_{i\Sigma} > R_\infty$, ahol:

$\pi_2^{\,*}(24) \quad = \pi_2(24) - 1 = \pi_2(6n_{A3}) - 1 = 3$

$G_{3\Sigma} \quad = (P_3\text{-}2)/P_3 = 0{,}6$

Megállapítható tehát, hogy minden véges i. fokozattal bezárólag elvégzett szűrés után a növekvő i értékkel egyre csökkenő **$G_{i\Sigma}$ gyakoriság** a valódi I. rendű ikerprímet reprezentáló elemek R_∞ átlagos sűrűségét felülről, a $(0,\ n_{AKi<}]$ intervallumokban az $R_{0Ki<}$ átlagos sűrűség értékeket alulról korlátozza. Növekvő i értékkel a $(0,\ n_{AKi}]$ intervallum bővül, a $G_{i\Sigma} = R_{0Ki}$ átlagos sűrűség csökken.

KÖVETKEZMÉNY 4.1. Adott x értéknél nem nagyobb I. rendű ikerprímek közelítő számát az eloszlásukat alapvetően követő, Hardy és Littlewood által ikerprím-sejtésként meghatározott függvény írja le [1]:

(60) $\pi_2(x) \sim 2C_2\, x/\ln^2 x$, ahol

$C_2 = \prod_{P\geq 3} P(P\text{-}2)/(P\text{-}1)^2 \approx 0{,}66016181584686957392781211001 4\ldots$

Mivel $\pi_2(x)$ a sejtés szerint nem lineáris függvény, a 4.3. és 4.4. Észrevétel következményeként az x független változó diszkrét értékei „közelében” ($x{=}6n_{Ai}{=}A_i{\approx}6n_{AKi}$) léteznie kell az i értékével megszabott, $G_{i\Sigma}$ meredekségű lineáris függvényekkel közös pontjainak:

(61) $2C_2\, A_i\, /\ln^2 A_i \sim \pi_2(A_i) \sim \pi_2^{\,*}(A_i) = G_{i\Sigma}\, n_{AKi} = \xi_{*i}\, G_{i\Sigma}\, n_{Ai} \approx G_{i\Sigma}\, n_{Ai} = \delta_i \nu_i n_{Ai}$

$\pi_2^{\,*}(A_i)$ jó közelítése tehát ξ_{*i} minél pontosabb meghatározásán múlik. Ez egyfelől a (60) összefüggés elemzésével adódó $\xi = \lim_{i\to\infty} \xi_i$ állandó helyettes alkalmazását, másfelől (i alacsony értékeinél) a κ_i faktor számítását jelentheti. (L. a 6. fejezet (80) - (83) összefüggéseit.) Amint pedig a Függelék IP 13/b. táblázata mutatja, a (61) összefüggésben már $i \geq 7$ esetekben a $\xi_{*i} \approx \xi_i\, \varphi_{ik} = \xi_i\, (1{+}\ln^{-1} i)$ helyettesítés jelentősen kisebb hibát eredményez, mint Hardy és Littlewood függvénye szerint a $2C_2 = \lim_{i\to\infty} 2C_{2i}$ állandó, vagy a $2C_{2i}$ változó faktor alkalmazása.

A $G_{i\Sigma}$ lineáris függvények azonban (60)-nal szemben nem alkalmasak $\pi_2(x)$ közvetlen számítására az x független változó minden értékénél, annak közelítéséhez az i prím sorszám szerinti diszkrét $\pi_2^{\,*}(A_i) \approx \xi_i\, \varphi_{ik}\, G_{i\Sigma} n_{Ai}$ eredmények interpolációja szükséges.