5. A prímszám-tétel és az ikerprím-sejtés összefüggése

ÉSZREVÉTEL 5.1. Amint az eredetileg prímek szitálására használt CPS az ikerprímek szitálására is alkalmassá tehető, úgy az ikerprímek fokozatos szűréssel való elkülönítése a prímek fokozatos szűrésére is adaptálható. Ennek algoritmusát a Függelék IP ismerteti, és bemutatja a 2.-5. szűrési fokozat táblázatait. A fokozatos szűrésből következően megállapítható, hogy:

$\boxed{1.}$ Bármely fokozattal bezárólag elvégzett szűrés esetében a kiszűrt $n_{Bö}$ illetve $n_{Fö}$ sorszámok egyenlő számú és különbségű végtelen diszjunkt számtani sorozatok tagjai, amelyek a fokozat periódusaiban a $(\Delta_i-1)/2+m\Delta_i$ számtani középértékekre nézve párosíthatók (*m* minden egész értéke mellett).

$\boxed{2.}$ Az n_B illetve n_F sorszámok közül kiszűrt elemek diszjunkt számtani sorozatai a negatív számtartományban is végtelenek. Ezeknek a sorozatoknak az abszolút értékben azonos összetett számot reprezentáló tag-párjai sorszámainak számtani középértéke $-1/2$ ($m = -1$). Ha ezért valamely pozitív összetett, vagy prím-szám a *B* számtani sorozat tagja, akkor annak negatív ellentettje az *F* számtani sorozatba tartozik, és megfordítva: az *F* számtani sorozatba tartozó pozitív összetett, illetve prím-számok negatív ellentettjei a *B* számtani sorozat tagjai.

KÖVETKEZMÉNY 5.1. Az 1.1. Következmény megállapítja, hogy a $P_1=2$ és a $P_2=3$ kivételektől eltekintve, a prímek *B*, vagy *F* számtani sorozatba való tartozása szerint azok P_B és P_F típusai léteznek. Mivel a prímszám-tétellel [10, 11] a prímek végtelen száma bizonyított, szükségszerű, hogy a jelzett számtani sorozatok legalább egyikének végtelen sok prím tagja legyen.

Ha a potenciális prímeket a ki nem szűrt elemek képviselik, akkor az 5.1. Észrevételből következően megállapítható, hogy bármely szűrési fokozat periódusaiban a fokozattal bezárólag elvégzett szűrés esetén ezek átlagos sűrűsége, illetve száma a *B* és az *F* számtani sorozaton belül megegyezik. Ezért a szűrés eredményeként ($i\to\infty$, $\Delta_i\to\infty$) külön a *B* és külön az *F* sorozatba tartozó ki nem szűrt elemek (valódi prímek) átlagos sűrűségének, illetve számának határértéke is megegyezik. Szükségszerű tehát, hogy ha a két sorozat egyikének végtelen sok prím tagja van, akkor a másikban is végtelen sok prímszám fordul elő.

A ki nem szűrhető, ezért valódi prímeket reprezentáló elemek véges *x* számhatárig figyelembe vett átlagos sűrűsége a *B* és az *F* számtani sorozaton belül (S_{0Bx} , S_{0Fx}) azonban csak közelítően lehet egyenlő, mivel a kiszűrt elemek diszjunkt sorozatainak legkisebb abszolút értékű tagjai különbözőek, és minden fokozat periódusaiban további fokozatok elemei is kiszűrésre kerülnek. Ezért véges intervallumban a *B* és az *F* sorozat prímeinek száma, illetve sűrűsége egymással analóg külön függvényekkel közelíthető, így **az összes prímszám, illetve -sűrűség meghatározásához a kétféle prímek számát ($\pi_B(x)$, $\pi_F(x)$), illetve sűrűségét (S_{0Bx} , S_{0Fx}) összegezni kell**:

(62) $\pi(x) - 2 = \pi^*(x) = \pi_B(x) + \pi_F(x)$, ahol $\pi(x) = S_{0x}x$ és
$S_{0x} - 2/x = S^*_{0x} = S_{0Bx} + S_{0Fx}$

{A * index és $\pi^*(x)$ (62) szerinti értelmezése itt eltér a szokásostól! V. ö.: [16], 191. oldal.}

A prímszám-tételből következően tehát:

(63) $S^*_{0x} = \pi^*(x)/x = S_{0Bx} + S_{0Fx} \sim 1/\ln x = K_{Bx}/\ln x + K_{Fx}/\ln x$, ahol $K_{Bx} + K_{Fx} = 1$

(64) $S^*_{0i} = \pi^*(A_i)/A_i = S_{0Bi} + S_{0Fi} \sim 1/\ln A_i = K_{Bi}/\ln 6n_{Ai} + K_{Fi}/\ln 6n_{Ai}$, ahol $K_{Bi} + K_{Fi} = 1$ és

(65) $S_{0Bi} \sim 1/2\ln A_i \sim S_{0Fi}$, tehát: $K_{Bi} \sim 1/2 \sim K_{Fi}$

A prímszám-tétel mellett az A_i értékeknél nem nagyobb prímek közelítő sűrűsége azok fokozatos szűrésének algoritmusából is levezethető [l.: Függelék IP, Prím szűrés, definíciók / A prímek fokozatos szűrése, 8. oldal, (f28), (f29) és (f30) összefüggés]:

(66) $S^*_{0i} \sim 1/\ln A_i \sim (1/3)\prod_{i=3}^{i}(P_i-1)/P_i = (1/2)\prod_{i=2}^{i}(P_i-1)/P_i$

(67) $S_{0Bi} \sim (1/4)\prod_{i=2}^{i}(P_i-1)/P_i \sim S_{0Fi}$

Miután a kivételes $(3;\ 5)$ ikerprím szám-pártól eltekintve, az I. rendű ikerprímek egyik tagja B, másik tagja pedig F típusú prím, annak valószínűsége, hogy valamely x egész, melyre $0<x=6n_A<A_i$, I. rendű ikerprím számtani középérték, arányos a $(0;\ A_i)$ intervallum B típusú és F típusú prímjeinek sűrűségével is. Ezért tehát a 6-tal osztható számtani középértékű I. rendű **ikerprímek Q^*_{0i} sűrűsége a két prím sűrűség szorzatával arányos** (69), ami megfelel a (68) szerinti aránypárnak is:

(68) $1 : K_{I/Bi}\, S_{0Bi} = K_{I/Fi}\, S_{0Fi} : Q^*_{0i}$

(69) $Q^*_{0i} = K_{I/i}\, S_{0Bi}\, S_{0Fi} \sim [\pi_2(6n_{Ai}) - 1]/6n_{Ai} = \pi_2^*(A_i)/A_i$, ahol $K_{I/i} = K_{I/Bi}\, K_{I/Fi}$

(69) alapján Q^*_{0i} meghatározására a következő lehetőségek állnak rendelkezésre:

$\boxed{1.}$ Q^*_{0i} meghatározása a prímszám-tétel, közelebbről (65) felhasználásával:

(70) $Q^*_{0i} \sim K_{I/i1} /4\ln^2 A_i$

$\boxed{2.}$ Q^*_{0i} meghatározása a prímek fokozatos szűrése, közelebbről (67) felhasználásával:

(71) $Q^*_{0i} \sim (K_{I/i2} /16)\prod_{i=2}^{i}(P_i-1)^2/P_i^2$, ahol

(72) $K_{I/i1} \sim K_{I/i} \sim K_{I/i2}$

A prímek és az I. rendű ikerprímek fokozatos szűrését összehasonlítva látható, hogy a szűrt periódusok elemszáma ugyan megegyezik (az i. fokozatban Δ_i), de míg az I. rendű ikerprímek esetében a szűrés csak az n_A sorszámok periódusaiban történik (periódus soronként 2 elem), addig a prímek szűrését az n_B és az n_F sorszámok periódusaiban is el kell végezni (periódus soronként 1 elem). Ezért az $x=6n_{Ai}=A_i$ -nél nem nagyobb, 6-tal osztható számtani középértékű, I. rendű ikerprímek átlagos sűrűségének meghatározására egy harmadik lehetőség is kínálkozik:

$\boxed{3.}$ Q^*_{0i} meghatározása az I. rendű ikerprímek fokozatos szűrése, közelebbről (28), (29), (35), (38) és (42) felhasználásával:

(73) $Q^*_{0i} \sim G_{i\Sigma}\, n_{Ai} /6n_{Ai} = (1/6)\prod_{i=3}^{i}(P_i-2)/P_i = (1/2)\prod_{i=2}^{i}(P_i-2)/P_i$

A három formula közül Q^*_{0i} számítására $K_{I/i}$ ismeretének hiányában (70) és (71) közvetlenül nem használható, ezzel szemben (73) közelítő számításra alkalmas (l. pl. a Függelék IP 12. és 13/a. táblázatában a $G_{i\Sigma}= G_{(i-1)\Sigma}(P_i-2)/P_i$ értékek képzését). Ennek alapján, (71), (72) és (73) összevetésével:

(74) $Q^*_{0i} \sim (K_{I/i2} /16)\prod_{i=2}^{i}(P_i-1)^2/P_i^2 \sim (1/2)\prod_{i=2}^{i}(P_i-2)/P_i$

(75) $K_{I/i2} \sim 8 \prod_{i=2}^{i}P_i(P_i-2)/(P_i-1)^2 \sim K_{I/i1}$

(70) és (75) összevetésével:

(76) $Q^*_{0i} \sim (8/4\ln^2 A_i) \prod_{i=2}^{i}P_i(P_i-2)/(P_i-1)^2 = [2 \prod_{i=2}^{i}P_i(P_i-2)/(P_i-1)^2]/ \ln^2 A_i$

(77) $Q^*_{0i} = \pi_2^*(A_i)/A_i \sim 2C_{2i} /\ln^2 A_i$, ahol $C_{2i} = \prod_{i=2}^{i}P_i(P_i-2)/(P_i-1)^2 \sim K_{I/i1}/8,\ K_{I/i2}/8$

$\pi_2^*(A_i) = Q^*_{0i}\, A_i \sim 2C_{2i}\, A_i /\ln^2 A_i$

Látható, hogy (77) megfelel a (60) alatt bemutatott, Hardy és Littlewood által ikerprím-sejtésként meghatározott függvénynek, annak diszkrét, $x=A_i$ értékekre adaptált formája. A Függelék IP 13/b. táblázat β.) oszlopa szerint ugyanis az I. rendű ikerprímek számának az eredeti formulával való közelítésénél kissé jobb eredmény kapható, ha azzal csak a 6-tal osztható számtani középértékű I. rendű ikerprímek $\pi_2^*(A_i)=\pi_2(A_i)-1$ számát közelítjük, és $C_2=const$ helyett a C_{2i} produktumot a (77) összefüggésnek megfelelően P_i-vel bezárólag képezzük. (A kissé jobb eredmény alacsony i értékeknél jelentősebb.)

A prímek és az I. rendű ikerprímek fokozatos szűrésével számított sűrűségek felhasználásával tehát kimutatható, hogy **a prímszám-tételből az ikerprím-sejtés összefüggése szükségszerűen következik, ezért a Hardy és Littlewood által talált (60) formula** (4. fejezet) **szintén tételnek tekinthető**.