6. A ki nem szűrt elemek sűrűsége és száma

6.1. Határértékek

ÉSZREVÉTEL 6.1.1. Az *i*. fokozatban a megelőző fokozatokat követően kiszűrt sorszám-elemek előfordulásának gyakorisága az n_A sorszámok között (N_i) *i* növekvő értékével csökken. A 3. fejezet (39) összefüggés felhasználásával ($i \geq 4$):

(78) $$N_4 = (2/P4)(P3\text{-}2)/P3 = \mathbf{0{,}1\dot{7}1428\dot{5}\ldots} \geq N_i >$$

$$> \lim_{i\to\infty} \boldsymbol{N_i} = \lim_{i\to\infty} [(2/P_i)\prod_{i=4}^{i}(P_{i-1}\text{-}2)/P_{i-1}] = (\lim_{i\to\infty} 2/P_i) \prod_{i=4}^{\infty}(P_{i-1}\text{-}2)/P_{i-1} = \mathbf{0}$$

ÉSZREVÉTEL 6.1.2. Az i. fokozattal bezárólag kiszűrt elemek előfordulásának összes átlagos (periódusonkénti) gyakorisága ($N_{i\Sigma}$) a fokozatok $i=3$-tól emelkedő sorszámával a kezdeti $N_{3\Sigma}=0{,}4$ értékről mindenkor növekszik, de korlátos *i* értékek esetén az *1*-et nem éri el. A 3. fejezet (40) összefüggés felhasználásával ($i \geq 3$):

(79) $$N_{3\Sigma} = 1 - (P_3\text{-}2)/P_3 = \mathbf{0{,}4 \leq N_{i\Sigma} < N_\Sigma} = \lim_{i\to\infty} N_{i\Sigma} = \lim_{i\to\infty} (1\text{-}\delta_i v_i) = 1 - \prod_{i\geq 3}(P_i\text{-}2)/P_i = \mathbf{1 - 3\prod_{P\geq 3}(P\text{-}2)/P}$$

ÉSZREVÉTEL 6.1.3. A ki nem szűrt sorszám elemek előfordulásának átlagos (periódusonkénti) gyakorisága az n_A sorszámok között a kezdeti $G_{3\Sigma}=0{,}6$-ról mindenkor csökken, de korlátos *i* értékek esetén a *0*-t nem éri el. A 3. fejezet (42) összefüggés felhasználásával ($i \geq 3$):

(80) $$G_{3\Sigma} = (P_3\text{-}2)/P_3 = \mathbf{0{,}6 \geq G_{i\Sigma} > G_\Sigma} = \lim_{i\to\infty} G_{i\Sigma} = \lim_{i\to\infty} \delta_i v_i = \prod_{i\geq 3}(P_i\text{-}2)/P_i = \mathbf{3\prod_{P\geq 3}(P\text{-}2)/P}$$

Az 5. fejezet (73), (77) valamint a 4. fejezet (57) összefüggés figyelembe vételével:

(81) $$Q^*_{0i} = \pi_2^*(A_i)/A_i = R^*_{0i}/6 = \xi_{*i}\, G_{i\Sigma}/6 \approx G_{i\Sigma}/6$$

$$Q^*_{03} = \mathbf{0{,}125 \geq Q^*_{0i} > Q_2} = \lim_{i\to\infty} Q^*_{0i} = \lim_{i\to\infty} \pi_2^*(A_i)/A_i = \lim_{i\to\infty} \xi_{*i}\, G_{i\Sigma}/6 = \mathbf{(\xi_*/2)\prod_{P\geq 3}(P\text{-}2)/P = \xi_*\, G_\Sigma/6}$$

$$\xi_{*3} = \mathbf{1{,}25 > \xi_*} = \lim_{i\to\infty} \xi_{*i} = 6 \lim_{i\to\infty} \pi_2^*(A_i)/G_{i\Sigma} A_i = \mathbf{6Q_2/G_\Sigma}$$

G_Σ, illetve ξ_* közelítését és a tényleges ξ_{*i} értékek képzését, valamint a $G_{i\Sigma}$ értékek számítását l. a Függelék IP 13/a. táblázatában ($\xi_{*589} \approx 0{,}917734,\ G_{589\Sigma} \approx 0{,}035517,\ G_{27622\Sigma} \approx 0{,}024323$).

KÖVETKEZMÉNY 6.1.1. [1] és a 4. fejezet (60), valamint (61) szerint, (81) és (80) felhasználásával a Hardy és Littlewood által az I. rendű ikerprímek sűrűségére vonatkozó összefüggés:

(82) $$\boldsymbol{Q_2} = \lim_{x\to\infty} \pi_2^*(A_i)/A_i = \lim_{x\to\infty} \pi_2(x)/x = 2C_2 \lim_{i\to\infty} \ln^{-2} x = 2\lim_{i\to\infty} C_{2/i} \ln^{-2} A_i = 2\lim_{i\to\infty} C_{2/i} A_i^2 = \mathbf{2C_2\Lambda^2}$$

$$C_{2/2} = 0{,}75 \geq C_{2/i}\ (i \geq 2) = \prod_{i=2}^{i} P_i\,(P_i\text{-}2)/(P_i\text{-}1)^2 > \boldsymbol{C_2} = \lim_{i\to\infty} C_{2/i} = \prod_{i\geq 2} P_i\,(P_i\text{-}2)/(P_i\text{-}1)^2 =$$

$$= [\prod_{P\geq 3} P/(P\text{-}1)]^2 [\prod_{P\geq 3} (P\text{-}2)/P] = \mathbf{\Phi^2\, G_\Sigma/3} \approx 0{,}66016181584686957392781211001\!4\ldots$$

$$\Lambda_3^2 = \ln^{-2} 24 \geq \Lambda_i^2 (i \geq 3) > \mathbf{\Lambda^2} = \lim_{i\to\infty} \mathbf{\ln^{-2} A_i}$$

$$\Phi_3^2 = 3{,}515625 \leq \Phi_i^2\ (i \geq 3) < \mathbf{\Phi^2} = \prod_{P\geq 3} \mathbf{P^2/(P\text{-}1)^2}$$

$$Q^*_{0i} \sim \boldsymbol{Q_2} = \mathbf{4(\Lambda\Phi)^2 G_\Sigma/6}$$

(81) és (82) összevetésével:

(83) $$\lim_{x\to\infty} \pi_2(x)/x = \lim_{i\to\infty} \pi_2^*(A_i)/A_i = Q_2 = \xi\, G_\Sigma/6 = \mathbf{4(\Lambda\Phi)^2 G_\Sigma/6 = 2C_2\,\Lambda^2}$$

$$\xi_3 \approx 1{,}392323 > \boldsymbol{\xi} = \mathbf{4(\Lambda\Phi)^2} = \lim_{i\to\infty} \xi_i = 4 \lim_{i\to\infty} [\ln^{-1} A_i \prod_{i=2}^{i} P_i/(P_i\text{-}1)]^2 \approx 0{,}794\ldots$$

ξ közelítésére l. a Függelék IP 13/a. táblázatában ξ_i oszlopát. A táblázat szerint: $\xi_{589} \approx 0,797147$, $\xi_{2762} \approx 0,794091$, valamint a vizsgált $7 \leq i \leq 589$ tartományban a tényleges ξ_{*i} faktor jó közelítéssel: $\xi_{*i} \approx \xi_i \varphi_{ik} = \xi_i (1+\ln^{-1} i)$

SEGÉDTÉTEL 6.1.1. Bármely véges *i.* fokozattal bezárólag elvégzett szűrés esetén az n_A sorszámok $[n_{Ai}, \infty)$ intervallumában a potenciálisan I. rendű ikerprímeket reprezentáló ki nem szűrt elemek száma végtelen sok.

BIZONYÍTÁS 6.1.1.

$\boxed{1.}$ Az $A=6n_A$ sorozat n_A sorszámainak teljes végtelen számtani sorozata (az egész számok sorozata) csak a fokozatos szűrés kezdetén reprezentál potenciálisan I. rendű ikerprímeket. A szűréssel ebből a végtelen számtani sorozatból fokozatonként különítjük el az ikerprímeket nem reprezentáló elemek diszjunkt végtelen számtani sorozatait. Ennek eredményeként fokozatosan tágul az n_A sorszámoknak az a $[0, n_{Ai})$ részintervalluma, amelyben csak valódi I. rendű ikerprímeket reprezentáló és kiszűrt elemek vannak, és fokozatosan csökken a potenciálisan I. rendű ikerprímeket reprezentáló elemek gyakorisága a részintervallumon kívüli, minden fokozat után továbbra is végtelen sok-elemű $[n_{Ai}, \infty)$ sorszám halmazban.

Az i. fokozatban ($i \geq 3$) és azt követően az $[n_{Ai}, \infty)$ intervallumban ki nem szűrt, potenciálisan I. rendű ikerprímeket reprezentáló elemek száma azért nem korlátos, mert a kiszűrhető végtelen számtani sorozatok sem egyike, sem összessége nem foglalja magába az intervallum ki nem szűrt összes elemét, hiszen a kiszűrt sorozatok minden fokozatban csak részben azonosak az intervallum elemeinek végtelen sorozataival. A szűrés során tehát nem a potenciális I. rendű ikerprímek, illetve az azokat reprezentáló n_A sorszámok végtelen száma csökken, hanem csak azok átlagos sűrűsége. Az $[n_{Ai}, \infty)$ intervallum Δ_i elemszámú periódusaiban a (42) összefüggéssel meghatározott gyakoriság (3. fejezet) felhasználásával számítható a fokozatonként ki nem szűrt elemek száma ($m = 0, 1, 2, \ldots$):

(84) $$3 = G_{3\sum}\Delta_3 < 15 = G_{4\sum}\Delta_4 < 135 = G_{5\sum}\Delta_5 < \ldots < \lim_{i\to\infty} G_{i\sum}\Delta_i = \lim_{i\to\infty} \delta_i = \prod_{i=3}^{\infty}(P_i-2) = \infty$$

(85) $$G_{i\sum}\Delta_i \leq (m+1)G_{i\sum}\Delta_i < \lim_{m,i\to\infty} (m+1)G_{i\sum}\Delta_i = \lim_{m,i\to\infty} (m+1)\delta_i = [\lim_{m\to\infty} (m+1)]\prod_{i=3}^{\infty}(P_i-2) = \infty$$

Q.E.D.

$\boxed{2.}$ A fokozatok a prímek sorszámaihoz rendelhetők, ezért számuk végtelen sok. Az $i>2$ sorszámú fokozatokban a ki nem szűrt n_A sorszámok már nem képeznek egyetlen végtelen számtani sorozatot, hanem csak a kezdetinél kisebb sűrűségű halmazt, amely azonban mindenkor új, P_i függvényeként meghatározott L_i számú, Δ_i különbségű végtelen számtani sorozatra bontható:

(86) $L_i = Z_i P_i = K_i P_i /2$ A Z_i szegmensszámra vonatkozóan l. a 3. fejezetben a (33) összefüggést.

Az *i.* fokozatban az L_i számú sorozatból kiszűrt elemek is Δ_i különbségű diszjunkt végtelen számtani sorozatok, melyek száma:

(87) $K_i = 2Z_i = 2(P_3-2)(P_4-2)\ldots(P_{i-1}-2)$

A korlátos sorszámú szűrési fokozatokban tehát a kiszűrt elemek végtelen számtani sorozatainak száma véges, de számuk határértéke – a fokozatok végtelenhez tartó sorszáma szerint – végtelen:

(88) $$\lim K_i = \lim_{i\to\infty} 2(P_3-2)(P_4-2)\ldots(P_{i-1}-2) = \infty$$

Ha az *i.* szűrési fokozatig ki nem szűrt elemeket (az L_i számú végtelen számtani sorozat tagjait) a fokozatban szűrt halmaznak tekintjük, akkor a fokozatban ki nem szűrt, ezért továbbra is potenciálisan I. rendű ikerprímet reprezentáló elemek és az összes elem aránya a mindenkor végtelen sok-elemű szűrt halmazon belül a szűrés során növekszik:

(89) $$3/5 = (P_3-2)/P_3 < 5/7 = (P_4-2)/P_4 < 9/11 = (P_5-2)/P_5 < \ldots < \lim_{i\to\infty} (P_i-2)/P_i = 1$$

A fokozatos szűrés eredményeként az azonos sűrűségű végtelen számtani sorozatokból álló, potenciális ikerprímeket reprezentáló szűrt halmazban a ki nem szűrt és kiszűrhető elemek (végtelen számtani sorozatok tagjai) arányának határértéke:

(90) $$3/2 = (P_3-2)/2 < 5/2 = (P_4-2)/2 < 9/2 = (P_5-2)/2 < \ldots < \lim_{i\to\infty} (P_i-2)/2 = \lim_{i\to\infty} (L_i-K_i)/K_i = \infty$$

Q.E.D.

3. A fokozatos szűrés algoritmusából következő páros kiszűrés szerint a kiszűrt elemek között periódusonként egyenlő arányban (sűrűségben) fordulnak elő az *(5, 0)*, a *(3, 2)* és a *(8, 7)* számjegyekre végződő n_A sorszámok (l. a 4.2. Észrevételt). Ezért a 6.1.1. Segédtétel igazolásához elegendő bizonyítani, hogy *5* prímtényezős szorzatai között minden elvégzett szűrési fokozat után végtelen sok ki nem szűrt sorszám elem létezik.

A fokozatos szűrés algoritmusa alapján az *i.* szűrési fokozat periódusaiban kiszűrésre kerülő és a megelőző fokozatokban már kiszűrt elemek a (31) szerint meghatározott $T_{m/i}$ számtani középértékekre vonatkoztatva párosíthatók (3. fejezet). (28) szerint ugyanis az $m\Delta_i = m\Delta_{i-1} P_i$ összefüggés is fennáll, ezért $T_{m/i}$ a megelőző fokozatokban kiszűrt elem-pároknak is számtani középértéke:

(91) $T_{m/i} \quad = \Delta_i /2 + m\Delta_{i-1} P_i = \ldots = \Delta_i /2 + mP_i P_{i-1} \ldots P_4 P_3$

Szükségszerű tehát, hogy az *i.* szűrési fokozattal bezárólag ki nem szűrt elemek általában ugyanezekre a számtani középértékekre nézve szintén párosak. Mivel azonban a periódusok Δ_i elemszáma páratlan, léteznie kell minden periódusban *1* bizonyosan ki nem szűrhető elemnek, amelynek a párja a szomszédos periódus eleme.

A $(0, \Delta_i]$ intervallum elemszáma páratlan, és Δ_i-nek a $T_{0/i}$ számtani középértékre vonatkozó párja *0*, mely nem eleme az intervallumnak. Mivel a *0* elem a szűrési fokozatokban nem kerül kijelölésre és kiszűrésre, ezért az *(i-1).* szűrési fokozatban a Δ_i elem sem jelölhető ki. Ebből következően az *i.* szűrési fokozatban az $(m+1)\Delta_i$ értékű elemek nem szűrhetők ki. Ezzel igazoltuk, hogy bármely $i \geq 3$ választás mellett a $P_3=5$ tényező miatt a páratlan prímtényezős szorzatok között létezik az *i.* szűrési fokozattal bezárólag ki nem szűrt $(m+1)\Delta_i$ értékű sorszám elemek végtelen számtani sorozata:

(92) $0 < T_{0/i} < \Delta_i < T_{1/i} < 2\Delta_i < T_{2/i} < 3\Delta_i < \ldots$

Q. E. D.

6.2. Az I. rendű ikerprímek száma

TÉTEL 6.2.1. **Az I. rendű ikerprímek számának nincsen felső korlátja.**

BIZONYÍTÁS 6.2.1. A bizonyítás során feltételezzük, hogy

- a prímszám-tételnek megfelelően végtelen sok prímszám létezik (az *i* prím sorszám index és szűrési fokozat szám értéke nem korlátos), ezért a fokozatos szűrés vég nélkül folytatható;
- ismerjük a $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_i$ prímszám sor minden elemét;
- a prímhézagok végtelen sok esetben *2*-nél nagyobbak;
- az I. rendű ikerprímeket reprezentáló számtani középérték sorszámok szitálására adaptált alternatív komplementer prímszita elemei - melyek jelentős része a prímszitában többször előfordul - és a fokozatos szűrés során egy alkalommal kiszűrhető, I. rendű ikerprímeket nem reprezentáló n_A sorszám elemek megegyeznek, számuk végtelen sok;

A. A 6.2.1. Tételt igazolja az, ha **az ikerprím-sejtés tételként elfogadható**.

Amint az 5.1. Következmény szerint kimutatható, az I. rendű ikerprímek fokozatos szűréséből, valamint a prímszám-tétel felhasználásával nyert sűrűség függvények – 5. fejezet, (73) és (70) – kapcsolatát a prímek fokozatos szűrésével számítható sűrűség (71) jelenti. Ennek alapján az I. rendű ikerprímek sűrűségére a Hardy és Littlewood ikerprím-sejtésként ismert függvényének [1] megfelelő (76), illetve (77) összefüggés szükségszerűen következik, ezért [1] is tételnek minősül. Ebből következően az **I. rendű ikerprím-tétel** tehát:

(93) $\lim_{i\to\infty} \pi_2^{*}(A_i) A_i^{-1} \ln^2 A_i = \lim_{i\to\infty} 2C_{2/i} =$

$= \boldsymbol{\lim_{x\to\infty} \pi_2(x) x^{-1} \ln^2 x = 2C_2} = 2\prod_{P>2} P(P-2)/(P-1)^2 \approx 1{,}32032363169373914785562422 00\ldots$

Q. E. D.

$\boxed{\text{B.}}$ A $(0, j_i]$ intervallumban i. minden véges értéke mellett véges számú kiszűrt és ki nem szűrt elem van. A (30) és (43) összefüggés szerint (3. és 4. fejezet):

(94) $j_i = \mathrm{int}[(P_i+1)/6] < (P_i^2-1)/6 = n_{Ai}$, ezért az intervallumba tartozó, az i. szűrési fokozattal bezárólag ki nem szűrt, R_{0ji} átlagos sűrűségű elemek a további fokozatok során sem kerülnek kiszűrésre. Ezek mindegyike tehát I. rendű ikerprímet reprezentál, melyek száma a $3 \le i \le 8$ esetekben:

(95) $\pi_{2ji}\,(3\le i\le 8) - 1 = \pi_{2}{}^{*}{}_{ji}\,(3\le i\le 8) = R_{0ji}\,(3\le i\le 8)\, j_i = j_i$, mivel $R_{0ji}\,(3\le i\le 8) = 1$

Minden $i > 8$ esetben pedig:

(96) $\pi_{2ji}(i>8) - 1 = \pi_{2}{}^{*}{}_{ji}(i>8) = R_{0ji}\,(i>8)\, j_i < j_i$, mivel $R_{0ji}\,(i>8) < 1$

Amint azt a 4. fejezetben (54)-nél indokoltuk, (95) és (96) esetében az I. rendű ikerprímek számából a kivételt jelentő (3; 5) pár miatt 1-et le kell vonni.

Mivel j_i (94) szerinti meghatározása alapján $\lim_{i\to\infty} j_i = \infty$, a 6.2.1. Tétel bizonyításához **elegendő igazolni azt, hogy** $\lim_{i\to\infty} \pi_{2ji} = \infty$ **.**

$\boxed{\text{B1.}}$ Figyelemmel a 3. fejezet (31) és (32) szerinti $T_{m/i} = T_{0/i} + m\Delta_i = \Delta_i/2 + m\Delta_i$ meghatározásra, jelöljük $i \ge 3$ és $m = 0, 1, 2, \dots$ esetben az i. fokozattal bezárólag ki nem szűrt n_A sorszám elemek átlagos sűrűségét a jelzett intervallumokban a következők szerint:

a $(0, j_i]$	intervallumban:	$R_{0ji} = 6Q^{*}_{0ji}$
a $(0, T_{m/i})$	intervallumokban:	$R_{0Tm/i}$
a $(T_{m/i}, (m+1)\Delta_i]$	intervallumokban:	$R_{cT/i}$
a $(0, (m+1)\Delta_i+j_i]$	intervallumokban:	$R_{0m/i+}$
a $(0, (m+1)\Delta i]$	intervallumokban:	$R_{0m/i\Sigma}$
az $(m\Delta_i+j_i\ , T_{m/i})$	intervallumokban	,
a $(T_{m/i}, (m+1)\Delta_i-j_i)$	intervallumokban	és
az $(m\Delta_i+j_i\ , (m+1)\Delta_i-j_i)$	intervallumokban:	$R_{ci/1}$
az $(m\Delta_i+j_i\ , (m+1)\Delta_i]$	intervallumokban:	$R_{ci/2}$
a $(T_{m/i}, (m+1)\Delta_i+j_i]$	intervallumokban:	$R_{ci/3}$
az $(m\Delta_i+j_i\ , (m+1)\Delta_i+j_i]$	periódusokban	,
a $(T_{m/i}, T_{(m+1)/i})$	szimmetrikus periódusokban	és
az $((m+1)\Delta_i, (m+2)\Delta_i]$	szimmetrikus periódusokban:	$G_{i\Sigma}$
az $[(m+1)\Delta_i-j_i, (m+1)\Delta_i)$	intervallumokban	és
az $((m+1)\Delta_i, (m+1)\Delta_i+j_i]$	intervallumokban:	$R_{cji\pm} = 6Q_{cji\pm}$
az $[(m+1)\Delta_i-j_i, (m+1)\Delta_i+j_i]$	intervallumokban:	R_{cji}

A 4.1. Észrevétel következményeként megállapítható, hogy a $(0, j_i]$ intervallumban az R_{0ji} , valamint az ezzel megegyező elemszámú $[(m+1)\Delta_i-j_i\ , (m+1)\Delta_i)$ és $((m+1)\Delta_i\ , (m+1)\Delta_i+j_i]$ páros intervallumokban az $R_{cji\pm}$ sűrűségek az i. fokozatot követő szűrés során már nem változnak. A jelzett intervallumok a további fokozatokban kiszűrhető elemeket nem tartalmaznak, ugyanis:

- A $(0, j_i]$ intervallum ki nem szűrt elemei (94) miatt az i. fokozattal bezárólag elvégzett szűrés esetén már I. rendű ikerprímeket reprezentálnak, tehát:

(97) $R_{0ji} = 6Q^{*}_{0ji} = (\pi_{2ji}-1)/j_i > 0$

- A jelzett többi páros intervallum $R_{cji\pm}$ sűrűsége az i. fokozatot követő szűrés során azért nem változik, mert ezekben a fokozattal bezárólag minden elem kiszűrésre került: ezek a 4.1. Észrevétel szerint a $(0, j_i]$ intervallum kiszűrt és ki nem szűrt elemeinek megfelelő párok. Ezért:

(98) $R_{cji\pm} = 1 - (1- R_{0ji}) - R_{0ji} = \pi_{2cji\pm}/j_i = 6Q_{cji\pm} = 0$, ahol tehát
$\pi_{2cji\pm} = 0$

Ezzel szemben a jelzett $R_{cji\pm} = 0$ sűrűségű intervallum-párok határát jelentő $(m+1)\Delta_i$ értékű elemek a 6.1.1. $\boxed{3.}$ Bizonyítás szerint az i. fokozatban nem kerülnek kiszűrésre, az $[(m+1)\Delta_i-j_i\ , (m+1)\Delta_i+j_i]$ intervallumok ki nem szűrt elemeinek sűrűsége az i. fokozattal bezárólag végzett szűrés után ezért:

(99) $R_{cji} \quad = 1/2j_i \geq \pi_{2cji}(m)/2j_i \geq 0$, ahol tehát
$1 \quad \geq \pi_{2cji}(m) \quad \geq 0$
az m értékeivel meghatározott $[(m+1)\Delta_i\text{-}j_i\ ,\ (m+1)\Delta_i+j_i]$ intervallumokban a valódi I. rendű ikerprímet reprezentáló elemszám, melynek értéke legfeljebb 1, mivel az intervallumokban még ki nem szűrt $(m+1)\Delta_i$ elemek az $i.$ fokozatot követő szűrés során részben (m egyes értékeinél) kiszűrésre kerülnek.

Feltételezve a $(0, j_i]$ intervallumban az I. rendű ikerprímeket reprezentáló elemek (97) szerinti R_{0ji} sűrűségének ismeretét, a felsorolt többi intervallumban az $i.$ fokozattal bezárólag még ki nem szűrt n_A sorszám elemek átlagos sűrűsége kiszámítható. Ehhez $R_{cji\pm}$ a (98), R_{cji} a (99) összefüggés alapján határozható meg, ahol j_i értékét (94) szabja meg. A 3. fejezet (28) összefüggéssel számított Δ_i elemszámú periódusokban az $i.$ fokozattal bezárólag még ki nem szűrt n_A sorszám elemek átlagos sűrűsége $G_{i\sum}$, ami (42) felhasználásával számítható.

A 4.3. és 4.4. Észrevételből, tehát az R_0 sűrűségek csökkenő tendenciájából következően, az $i.$ fokozattal bezárólag ki nem szűrt n_A sorszám elemeknek a felsorolt intervallumokra vonatkozó átlagos sűrűségei között a következő összefüggések állnak fenn:

B1.1.

(100) $R_{0T0/i}\,\Delta_i/2 \quad = R_{0ji}\,j_i + R_{ci/1}(\Delta_i - 2j_i)/2$ $\quad R_{ci/1}$ számítható R_{0ji} ismerete nélkül:
(101) $R_{ci/1} \quad = (G_{i\sum}\,\Delta_i - 1)/(\Delta_i - 2j_i) \neq R_{0ji}$ $\quad$ Mivel a $(j_i\ ,\ \Delta_i/2)$ intervallum az $i.$ fokozatban kiszűrt elemeket is tartalmaz, szükségszerűen következik:
(102) $R_{0ji} > R_{0T0/i} \quad > R_{ci/1}$
(103) $\mathbf{R_{0T0/i}} \quad = 2R_{0ji}\,j_i/\Delta_i + R_{ci/1}(\Delta_i - 2j_i)/\Delta_i = \mathbf{G_{i\sum} + (2R_{0ji}j_i - 1)/\Delta_i}$

B1.2.

(104) $R_{00/i\sum}\,\Delta_i \quad = R_{0T0/i}\,\Delta_i/2 + R_{cT/i}\,\Delta_i/2 = R_{0T0/i}\,\Delta_i/2 + R_{ci/1}(\Delta_i - 2j_i)/2 + 1$
(105) $R_{00/i\sum}\,\Delta_i \quad = R_{0ji}j_i + R_{ci}/2(\Delta_i - j_i)$ $\quad R_{cT/i}$ és $R_{ci}/2$ számítható R_{0ji} ismerete nélkül:
(106) $R_{cT/i}\,\Delta_i/2 \quad = (G_{i\sum}\,\Delta_i + 1)/2$
(107) $R_{cT/i} \quad = G_{i\sum} + 1/\Delta_i \quad \neq R_{0ji}$
(108) $R_{ci}/2 \quad = G_{i\sum}\Delta_i/(\Delta_i - j_i) \quad \neq R_{0ji}$ $\quad$ Mivel a $(j_i\ ,\ \Delta_i/2)$ és a $(\Delta_i/2,\ \Delta_i]$ intervallum az $i.$ fokozatban kiszűrt elemeket is tartalmaz, szükségszerűen következik:
(109) $R_{0T0/i} > R_{00/i\sum} \quad > R_{cT/i}$
(110) $R_{0ji} \quad > R_{00/i\sum} \quad > R_{ci/2}$
(111) $\mathbf{R_{00/i\sum}} \quad = \mathbf{G_{i\sum} + R_{0ji}\,j_i/\Delta_i}$

B1.3.

(112) $R_{00/i}{+}(\Delta_i + j_i) \ = R_{00/i\sum}\Delta_i + R_{cji}{+}j_i$
(113) $R_{00/i}{+}(\Delta_i + j_i) \ = R_{0T0/i}\,\Delta_i/2 + R_{ci/3}(\Delta_i/2 + j_i) = R_{0T0/i}\,\Delta_i/2 + R_{ci/1}(\Delta_i - 2j_i)/2 + 1$
(114) $R_{00/i}{+}(\Delta_i + j_i) \ = R_{0ji}\,j_i + G_{i\sum}\Delta_i$ $\quad Rci/3$ számítható R_{0ji} ismerete nélkül:
(115) $R_{ci/3}(\Delta_i/2 + j_i) = (G_{i\sum}\,\Delta_i - 1)/2 + 1 = (G_{i\sum}\,\Delta_i + 1)/2$
(116) $R_{ci/3} \quad = (G_{i\sum}\,\Delta_i + 1)/(\Delta_i + 2j_i) \neq R_{0ji}$ $\quad$ Mivel a $(j_i\ ,\ \Delta_i/2)$ és a $(\Delta_i/2,\ \Delta_i{+}j_i]$ intervallum az $i.$ fokozatban kiszűrt elemeket is tartalmaz, szükségszerűen következik:
(117) $R_{00/i\sum} > R_{00/i+} \ > R_{cji+} = 0$
(118) $R_{0T0/i} \ > R_{00/i+} > R_{ci/3}$
(119) $R_{0ji} \quad > R_{00/i+} \ > G_{i\sum}$
(120) $\mathbf{R_{00/i+}} \quad = \mathbf{(R_{0ji}\,j_i + G_{i\sum}\,\Delta_i)/(\Delta_i + j_i)}$

A (102), (109), (117) és (119) összefüggés szerint tehát fennáll a következő sorrend:
(121) $\mathbf{R_{0ji} > R_{0T0/i} > R_{00/i\sum} > R_{00/i+} > G_{i\sum}}$

A (121)-ben feltüntetett sűrűségek közül a P_i-nél nem nagyobb prímek ismeretében - ami feltétel szerint adott - $G_{i\sum}$ számítható. Ugyanez a feltétel biztosítja R_{0ji} ismeretét, valamint Δ_i és j_i számíthatóságát is. Ezek felhasználásával $R_{0T0/i}$, $R_{00/i\sum}$ és $R_{00/i+}$ is meghatározható (l. a Függelék IP 14. táblázatát). A kimutatott sűrűség viszonyok mellett még a következő sorrendek is fennállnak:

(122) $\mathbf{R_{0ji} \quad > R_{0T0/i} \geq R_{0Tm/i} > \lim_{m\to\infty} R_{0Tm/i} \quad = G_{i\sum}}$

(123) $\mathbf{R_{0T0/i} > R_{00/i\Sigma} \geq R_{0m/i\Sigma} > \lim_{m\to\infty} R_{0m/i\Sigma} = G_{i\Sigma}}$

(124) $\mathbf{R_{00/i\Sigma} > R_{00/i+} \geq R_{0m/i+} > \lim_{m\to\infty} R_{0m/i+} = G_{i\Sigma}}$

$\boxed{\text{B2.}}$ Az $i.$ szűrési fokozattal bezárólag elvégzett szűrés során ($i \geq 3$) a ki nem szűrt tagok előfordulásának átlagos gyakorisága az n_A sorszámok $(j_i\ ,\ \Delta_i+j_i]$, $(n_{Ai}\ ,\ \Delta_i+n_{Ai}]$, $(T_{0/i}\ ,\ T_{1/i})$ és $(\Delta_i\ ,\ 2\Delta_i]$ periódusaiban is $G_{i\Sigma}$, ami a 3.1.16. Definíció, illetve a 4.4. Észrevétel szerint határozható meg, és a (42) összefüggés alapján számítható: $G_{i\Sigma} = \delta_i\ v_i$. A megelőző fokozatokban a gyakoriság állandó ennél nagyobb, a további fokozatokban kisebb ($G_{i\Sigma}$ értéke növekvő i esetén monoton csökken):

(125) $G_{3\Sigma} > G_{4\Sigma} > \ldots > G_{(i-2)\Sigma} > G_{(i-1)\Sigma} > G_{i\Sigma} > G_{(i+1)\Sigma} > G_{(i+2)\Sigma} > \ldots$

(94) szerint i növekedésével n_{Ai} jelentősen nagyobb mértékben növekszik j_i-nél, ezért $i \geq 4$ esetben fennáll, hogy

(126) $j_i < \ldots < n_{A(i-1)} < n_{Ai} < n_{A(i+1)} < \ldots$

Mivel (37) szerint $n_{Aik} \geq n_{Ai}$, elegendően nagy i értékek esetén következik, hogy:

(127) $G_{3\Sigma} > G_{4\Sigma} > \ldots > \mathbf{R_{0ji} > \ldots > G_{(i-2)\Sigma} > G_{(i-1)\Sigma} > G_{i\Sigma}}$

$\boxed{\text{B3.}}$ **A (121)-(124) és (127) összefüggés szerint: $\mathbf{R_{0ji} > G_{i\Sigma}}$**

Ennek figyelembe vételével, valamint szem előtt tartva, hogy (96) szerint $i > 8$ esetben $R_{0ji} < 1$, a $6j_i$ értéknél nem nagyobb számtani középértékű I. rendű ikerprímek számára a következő biztos alsó korlát állapítható meg:

(122) $\pi_2(6ji) = \pi_{2ji} = \pi_2{}^*_{ji} + 1 = 1 + R_{0ji}\, j_i > G_{i\Sigma}\, j_i$

Az alsó korlát határértéke $i\to\infty$ esetben:

(123) $\lim_{i\to\infty} G_{i\Sigma}\, j_i = \lim_{i\to\infty} [(P_3\text{-}2)/P_3][(P_4\text{-}2)/P_4] \ldots [(P_g\text{-}2)/P_g] \ldots [(P_i\text{-}2)/P_i]*int[(P_i+1)/6] =$

$= \lim_{i\to\infty} 2^{-1}[(P_4\text{-}2)/P_3][(P_5\text{-}2)/P_4] \ldots [(P_g\text{-}2)/P_{g-1}] \ldots [(P_i\text{-}2)/P_{i-1}] = \infty$

Az eredményt indokolja, hogy a $P_g - 2 > P_{g-1}$ eset előfordulása nem korlátos. A szorzatnak ezért végtelen sok esetben van 1-nél nagyobb, és csak 1 esetben van 1-nél kisebb tényezője.

Az alsó korlát határértékéből (122) figyelembe vételével következik:

(124) $\mathbf{\lim_{i\to\infty} \pi_{2ji} = \infty}$

Q. E. D.

$\boxed{\text{C.}}$ A 6.2.1. Tételt igazolja az, ha bizonyítjuk, hogy **minden korlátos egész *f* érték esetén létezik olyan *r* > *f* prím sorszám, hogy**

(125) $\mathbf{P_{r+1} - P_r = 2}$ **és** $\mathbf{A_{1^*f} = (P_{r+1} + P_r)/2 > P_f^2 = A_f + 1 > P_f}$

A 3.2.1. Észrevétellel összhangban megállapítható, hogy minden fokozatban kizárólag olyan elemek szűrhetők ki, amelyek a megelőző fokozatok szűrésénél kiszűretlenek maradtak: tagjai a megelőző fokozatokban ki nem szűrt diszjunkt sorozatoknak, melyeknek 1. tagjai ezeknek a fokozatoknak az 1. periódusaiban vannak.

Az $f.$ szűrési fokozat periódusai: $((s_f\ \text{-}1)\Delta_f+k_f\ ,\ s_f\,\Delta_f+k_f\,]$, ahol $j_f \leq k_f \leq n_{Af}$ és s_f a fokozat periódusainak sorszáma (3.1.9. Definíció). Minden $f \geq 3$ esetben j_f és n_{Af} (94) alapján határozható meg: $j_f = \text{int}[P_f+1]/6$ és $n_{Af} = (P_f^2\text{-}1)/6$. A (28) összefüggésnek megfelelően: $\Delta_f = P_3\, P_4 \ldots P_f = \Delta_{f-1}\, P_f$

Jelöljük $i > f$ esetben az $i.$ szűrési fokozat 1. periódusában kiszűrt valamely elemet n_{Aki} szimbólummal. Ezt a periódust az $(i\text{-}1).$ szűrési fokozat $s_{i-1} = 1, 2, \ldots, P_i$ sorszámú periódusainak elemei alkotják. Jelöljük az $(i\text{-}1).$ fokozatban ki nem szűrt sorozatok közül annak a sorozatnak az 1. tagját n_{A^*i-1} szimbólummal, amelynek s_{i-1} sorszámú tagja n_{Aki} .

Mivel i értéke nem korlátos, belátható, hogy minden $f \geq 3$ esetben léteznek olyan $n_{Af}\ ,\ n_{Ag}\ ,\ n_{Ai}$ sorszámok, hogy

(126) $j_f < n_{Af} < n_{A(f+1)} < \ldots < n_{Ag} < (\Delta_f + n_{Af}) < n_{A(g+1)} < \ldots < n_{A(i-1)} < n_{Ai} < n_{A(i+1)}\ ,\ n_{Aki} < (\Delta_i + n_{Ai})$

Ebből következően:

(127)

$$\begin{array}{llll}
n_{Aki}/\Delta_{i-1} = s_{i-1} & + n_{A*i-1}/\Delta_{i-1} & s_{i-1} & = \mathrm{int}[n_{Aki}/\Delta_{i-1}] \\
n_{A*i-1}/\Delta_{i-2} = s_{i-2} & + n_{A*i-2}/\Delta_{i-2} & s_{i-2} & = \mathrm{int}[n_{A*i-1}/\Delta_{i-2}] \\
\quad \ldots & & & \ldots \\
n_{A*g+1}/\Delta_{g} = s_{g} & + n_{A*g}/\Delta_{g} & s_{g} & = \mathrm{int}[n_{A*g+1}/\Delta_{g}] \\
n_{A*g}/\Delta_{g-1} = s_{g-1} & + n_{A*g-1}/\Delta_{g-1} & s_{g-1} & = \mathrm{int}[n_{A*g}/\Delta_{g-1}] \\
\quad \ldots & & & \ldots \\
n_{A*f+1}/\Delta_{f} = s_{f} & + n_{A*f}/\Delta_{f} & s_{f} & = \mathrm{int}[n_{AI*f+1}/\Delta_{f}] \\
n_{AI*f}/\Delta_{f-1} = s_{f-1} & + n_{AI*f-1}/\Delta_{f-1} & s_{f-1} & = \mathrm{int}[n_{AI*f}/\Delta_{f-1}] \\
\quad \ldots & & & \ldots \\
n_{AI*4}/\Delta_{3} = s_{3} & + n_{AI*3}/\Delta_{3} & s_{3} & = \mathrm{int}[n_{AI*4}/\Delta_{3}]
\end{array}$$

A (127) szerinti egyenlőségek felhasználásával számítható $n_{A*i-1} \geq n_{A*x} \geq n_{AI*3}$ sorszámok tehát az *i*. szűrési fokozatot megelőző fokozatok 1. periódusainak az *i*. fokozattal bezárólag ki nem szűrt elemei, így n_{AI*f} az *f*. szűrési fokozat $[n_{Af}, \Delta_f + n_{Af})$ periódusának ki nem szűrt eleme. Azok a ki nem szűrt elemek, amelyek $n_{A(i+1)}$ -nél kisebbek (pl. n_{AI*f}), az *i*. fokozatot követően sem kerülnek kiszűrésre, tehát I. rendű ikerprímeket reprezentálnak:

(128) $j_f < n_{Af} < n_{AI*f} < (\Delta_f + n_{Af}) < n_{Ai} < n_{A(i+1)}\ ,\ n_{Aki}$

(129) $\boldsymbol{n_{A(i+1)} > n_{AI*f} = (P_r + P_{r+1})/12 = A_{I*f}/6 > n_{Af} = (P_f^2 - 1)/6 = A_f/6 > \mathrm{int}[(P_f + 1)/6] = j_f}$

Itt $P_r = 6n_{AI*f} - 1 = 6(n_{AI*f} - 1) + 5$ (*F* típusú prím), és $P_{r+1} = 6n_{AI*f} + 1$ (*B* típusú prím), ezért $\boldsymbol{(P_r\ ,\ P_{r+1})}$ **I. rendű ikerprím, melynek számtani középértéke (125) szerint $\boldsymbol{P_f}$ -nél és $\boldsymbol{P_f^2}$-nél is nagyobb.**

Q.E.D.

6.3. A reprezentáció és a fokozatos szűrés további alkalmazásai, (pl. a Goldbach-sejtés vizsgálata)

A prímszám-párok számosságát átlagos sűrűségük vizsgálata felől közelítve, és annak következményét a prím különbség szűkítésével az egyre kisebb differenciákra kiterjesztve, nagyszerű eredmények születtek az ikerprím-sejtés bizonyíthatóságának elérésére [12], [13], [14]. A végtelen sokszor előforduló $P_{(h+1)}$ - P_h maximális prím különbség korlátjának egyre csökkenő meghatározása (*70 000 000*, *4680*, *600*, majd *246*) nem kis részben magyar kutatómunka eredménye. A számelmélet jelentős problémakörét öleli fel a prímhézagok és ezek kapcsán a prímkapcsolatok vizsgálata.

A páros prímkapcsolatokra, illetve ezek kombinációira alkalmazott **reprezentációval és fokozatos szűréssel** várható, hogy a páros, illetve többes prímkapcsolatokra vonatkozó törvényszerűségek feltárására a kis prímhézagok vizsgálata felől is lehetőség nyílik. A fennálló analógiák alapján pl. már az 1.4. Következményben utalás található az I. rendű ikerprímeknél feltárt összefüggések adaptációjára a II. rendű (*4* különbségű, „unokatestvér”) ikerprímek esetére is.

Törvényszerűnek mondható, hogy a prím kapcsolatok feltárása az összetett számok közötti összefüggéseken alapul. Ehhez nélkülözhetetlen az eratoszthenészi szita és a CPS, amelyek az összetett számok megjelölésére alkalmasak. A bemutatott fokozatos szűréssel is az összetett számok végtelen számtani sorozatait szűrjük ki, de ezzel **a már kiszűrt elemek ismételt kiszűrése kizárható.** Ezért ez a módszer fokozatonként lehetőséget ad a visszamaradó elemek szűrt végtelen tartományában a még ki nem szűrt elemek átlagos sűrűségének számítására, emellett pedig a tovább nem szűrhető tartományában az átlagsűrűség közelítésére, illetve ezek határértékeinek meghatározására.

Az összetett számok a prímhézagoknak felelnek meg. Egymás utáni előfordulásuk nagyobb prímhézagot jelent. A hézagok, ugyanakkor a remete prímek (nem korlátos) nagyságának, előfordulásának vizsgálatára – amint arra a remete ikerprímek kimutatása utal – a fokozatos szűrés felhasználása szintén javasolható.

További elemzés tárgyává tehető az prímhézagokra vonatkozó eredmények esetleges felhasználása fennálló számelméleti problémák megoldásának elősegítésére is, mint pl. a Goldbach-sejtés igazolására. Eszerint vizsgálandó, hogy **létezik-e olyan $K > 3$ egész szám, amelyre, mint számtani középértékre nézve, minden $2K$-nál kisebb pozitív prímnek összetett (prímhézagba tartozó) párja van?**